УДК 517.5

И.Р. Ковальчук
канд. физ.-мат. наук, доц.,
доц. каф. алгебры и математического анализа
Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки
e-mail: difrivnsnu@gmail.com

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ (ψ,β)-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ СТЕКЛОВА

Работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств сумм Стеклова на классах дифференцируемых функций. В частности, найдены асимптотические равенства для точных верхних граней приближений классов (ψ,β)-дифференцируемых функций суммами Стеклова в равномерной метрике.

Под классами $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, следуя [1], будем понимать множество суммируемых функций, ряд Фурье которых имеет вид

$$S[f]=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt,$$

где $\psi(k)$ – произвольная последовательность, $\beta\in R$, $\phi\in\mathfrak{N}\subset L$. Функцию $\varphi(\cdot)=f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ называют (ψ,β)-производной функции $f(\cdot)$. Когда $f\in L^{\psi}_{\beta}$ непрерывна и $\left\|f^{\psi}_{\beta}\right\|_{\infty}<1$, то говорят , что $f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Пусть

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\text{ –}$$

частная сумма ряда Фурье. Применяя к $S_n(f,x)$ преобразование Стеклова, при $h=\frac{2\pi}{n}$ получаем

$$S_{\frac{2\pi}{n}}(f,t)=\frac{n}{2\pi}\int_{t-\frac{\pi}{n}}^{t+\frac{\pi}{n}}S_n(f,x)dx=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\frac{k\pi}{n}}\left(a_k\cos kt+b_k\sin kt\right).$$

$S_{\frac{2\pi}{n}}(f,t)$ будем называть частной суммой Стеклова функции $f(t)$, а полученный метод суммирования – методом Стеклова.

В работе [2] получены асиптотические равенства для величин:

$$\varepsilon\left(W^rH_w,S_{\frac{2\pi}{n}}\right)=\sup_{f\in W^rH_w}\left\|f(x)-S_{\frac{2\pi}{n}}(f,x)\right\|_C.$$

Установлено, что метод Стеклова насыщенный и имеет порядок насыщения n^{-2}.

В настоящей работе изучаются приближения суммами Стеклова классов $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. При этом мы пользуемся методами исследований интегральных представлений уклонений линейных средних рядов Фурье работ [3–5].

При исследовании величины

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_{\frac{2\pi}{n}}\right) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| f(x) - S_{\frac{2\pi}{n}}(f,x) \right\|_C \tag{1}$$

будем считать, что функция $\psi(v)$, $\vartheta\in[1,\infty)$ непрерывна, выпукла вниз и $\lim\limits_{\vartheta\to\infty}\psi(v)=0$ $(\psi\in\mathfrak{M})$, а функция $g(v)=\vartheta^2\psi(v)$ выпукла вниз или вверх.

Теорема 1. Пусть $\beta=0$ и $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} g(v)>0$, тогда при $n\to\infty$ справедливо равенство

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{0,\beta}; S_{\frac{2\pi}{n}}\right) = \psi(n)A(\tau_n) + O\left(\frac{\psi(n)}{n}\right), \tag{2}$$

где

$$A(\tau_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\tau_n(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \tag{3}$$

и

$$\tau_n(v) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{\sin\pi v}{\pi v}\right)\dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & \dfrac{1}{\mathrm{n}}\le v\le 1,\\[2ex] \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v\ge 1.\end{cases}$$

Доказательство. Если функция $\tau_n(v)$ непрерывна на $[0,+\infty)$ и интеграл $A(\tau_n)$ сходится, то согласно лемме 2 из [4]

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}, S_{\frac{2\pi}{n}}\right) = \psi(n)A(\tau_n) + O\big(\psi(n)a(\tau_n)\big), \tag{4}$$

где

$$a(\tau_n) = \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\frac{\pi n}{2}}\left|\int_0^{\infty}\tau_n(v)\cos\left(\vartheta t+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt.$$

Определим функцию $\tau_n(v)$ на промежутке $\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$ так, чтобы ее график был касательной в точке $\dfrac{1}{n}$ к графику функции

$$\tau_n(v) = \left(1-\frac{\sin\pi v}{\pi v}\right)\frac{\psi(nv)}{\psi(n)}$$

$$\tau_n(v) = \frac{n^2}{\psi(n)\pi}\left(\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)\psi(1) + \left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)\psi'(v)v +$$
$$+\frac{n}{\psi(n)\pi}\left(\left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)(\psi(1)-\psi'(1)) - \left(\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)\psi(1)\right).$$

Тогда непрерывность $\tau_n(v)$ следует из определения.

Докажем, что

$$A(\tau_n) < C_1. \tag{5}$$

Пусть сначала $g(v) = \vartheta^2\psi(v)$ выпукла вверх. Представим $\tau_n(v)$ в виде $\tau_n(v) = \Phi_n(v) - R_n(v)$, где $\Phi_n(v)$ непрерывная выпуклая вниз, монотонно убывающая функция, совпадающая на $[1,+\infty)$ с $\dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}$, а на $[0,1]$ – с ее касательной:

$$\Phi_n(v) = \begin{cases} \dfrac{n\psi'(n)}{\psi(n)}\vartheta + \dfrac{\psi(n) - n\psi'(n)}{\psi(n)}, & 0 \le v \le 1, \\ \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v \ge 1. \end{cases}$$

Поэтому функция $R_n(\vartheta) = \Phi_n(\vartheta) - \tau_n(\vartheta)$ непрерывная, неотрицательная, невозрастающая, выпуклая вниз.

Учитывая (3), имеем

$$t(\tau_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\left(\Phi_n(v) - R_n(v)\right)\cos vtdv\right|dt \le$$

$$\le 2\left(\int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty}\Phi_n(v)\cos vtdv\right|dt + \int_0^{\infty}\left|\int_0^{\infty}R_n(v)\cos vtdv\right|dt\right). \tag{6}$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^{\infty}\Phi_n(v)\cos vtdv = \frac{1}{t}\int_0^{\infty}\left(-\Phi_n'(v)\right)\sin vtdv. \tag{7}$$

Функция $-\Phi_n'(v)$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает. Следовательно, при любом $t > 0$ $\frac{1}{t}\int_0^{\infty}\left(-\Phi_n(v)\right)\sin vtdv > 0$. Поэтому

$$\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{t}\int_0^{\infty}\left(-\Phi_n'(v)\right)\sin vtdv\right|dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^{A}\left(\int_0^{\infty}\left(-\Phi_n'(v)\right)\frac{\sin vt}{t}dv\right)dt. \tag{8}$$

Поскольку (при каждом $n \in N$) функция $-\Phi_n'(v)\dfrac{\sin vt}{t}$ суммируема на $[0,+\infty)\times[0,A]$ и $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin vt}{t}dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & v > 0 \\ 0, & v > 0 \end{cases}$, то, применяя теоремы Фубини и Лебега (о предельном переходе под знаком интеграла), имеем

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^{A}\left(\int_0^{\infty}\left(-\Phi_n'(v)\frac{\sin vt}{t}\right)dv\right)dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^{\infty}\left(-\Phi_n'(v)\right)\left(\int_0^{A}\frac{\sin vt}{t}dt\right)dv =$$

$$= \int_0^{\infty}\left(-\Phi_n'(v)\right)\left(\int_0^{\infty}\frac{\sin vt}{t}dt\right)dv = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\left(-\Phi_n'(v)\right)dv = \frac{\pi}{2}\Phi_n(0) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}\right). \tag{9}$$

Рассуждая аналогично, можно доказать, что

$$\int_0^\infty \left|\int_0^\infty R_n(v)\cos vtdv\right|dt = \frac{\pi}{2}R_n(0) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}\right)-$$

$$-\frac{n}{\psi(n)\pi}\left(\left(\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right)(\psi(1)-\psi'(1))-\left(\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)\psi(1)\right). \tag{10}$$

Так как функция $v^2\psi(n)$ при $v \geq 1$ не убывает, то

$$\left(v^2\psi(v)\right)' = 2v\psi(v)+\vartheta^2\psi'(v) > 0$$

и

$$-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \leq 2. \tag{11}$$

Учитывая разложения в степенные ряды функций $\sin x$ и $\cos x$, получаем

$$\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}+\frac{\pi^3}{n^3 6}-\frac{\pi^5}{n^5 5!}+\ldots = \frac{\pi^3}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^5}\right),$$

$$\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}-\frac{\pi^3}{n^3 3!}+\frac{\pi^5}{n^5 5!}-\ldots-\frac{\pi}{n}+\frac{\pi^3}{n^3 2!}-\frac{\pi^5}{n^5 4!}+\ldots = \frac{\pi^3}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Отсюда

$$\left|\frac{n}{\pi\psi(n)}\left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)(\psi(1)-\psi'(1))-\left(\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)\psi(1)\right| < C_2. \tag{12}$$

Обьединяя соотношения (6) – (12), убеждаемся в справедливости оценки (5).

Применяя рассуждения, использованные при доказательстве соотношения (9), получаем

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^\infty \left|\int_0^\infty \Phi_n(v)\cos vtdv\right|dt < \frac{\pi}{2n}\Phi_n(0) = \frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}\right). \tag{13}$$

Аналогично

$$\int_{\frac{n\pi}{2}}^\infty \left|\int_0^\infty R_n(v)\cos vtdv\right|dt < \frac{\pi}{2n}R_n(0) = \frac{\pi}{2n}\left(1-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}\right)-$$

$$-\frac{n}{\psi(n)\pi}\left(\left(\frac{\pi}{n}-\sin\frac{\pi}{n}\right)(\psi(1)-\psi'(1))-\left(\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)\psi(1)\right). \tag{14}$$

Так как

$$a(\tau_n) = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{n\pi}{2}}^\infty \left|\int_0^\infty \tau_n(v)\cos vtdv\right|dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\left(\int_{\frac{n\pi}{2}}^\infty \left|\int_0^\infty \Phi_n(v)\cos vtdv\right|dt + \int_{\frac{n\pi}{2}}^\infty \left|\int_0^\infty R_n(v)\cos vtdv\right|dt\right),$$

то из соотношений (11) – (14) следует, что

$$a(\tau_n) = \frac{C_3}{n}. \tag{15}$$

Пусть теперь функция $\vartheta^2\psi(v)$ выпукла вниз и $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} v^2\psi(v)=\infty$ или $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} v^2\psi(v)=C>0$.

Поскольку $\tau_n(v)$ непрерывна на $[0,\infty)$, $\tau_n'(v)$ непрерывна на $[0,1)\cup(1,\infty)$, $\lim\limits_{\vartheta\to\infty}\tau_n(v)=\lim\limits_{\vartheta\to\infty}\tau_n'(v)=0$, то, дважды интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^\infty \tau_n(v)\cos vt dv = -\frac{1}{t^2}\left(\tau_n'(0)+\left(\tau_n'(1+0)-\tau_n'(1-0)\right)\cos t+\int_{\frac{1}{n}}^{1}+\int_1^\infty \tau_n''(v)\cos vt dv\right). \tag{16}$$

Так как $\tau_n'(0)-\tau_n'(\frac{1}{n})=0$, $\tau_n'(1+0)-\tau_n'(1-0)=-1$, $\tau_n''(v)>0$ при $v\in\left[\frac{1}{n},\infty\right)$, то из (16) имеем:

$$\left|\int_0^\infty \tau_n(v)\cos vt dv\right| \le \frac{1}{t^2}\left(\tau_n'(0)+\left|\left(\tau_n'(1+0)-\tau_n'(1-0)\right)\cos t\right|+\int_{\frac{1}{n}}^{1}+\int_1^\infty \left|\tau_n''(v)\right| dv\right)=$$

$$=\frac{1}{t^2}\left(\tau_n'(0)+\left|\left(\tau_n'(1+0)-\tau_n'(1-0)\right)\cos t\right|+\tau_n'(1-0)-\tau_n'(\frac{1}{n})-\tau_n'(1+0)\right)\le$$

$$\le \frac{1}{t^2}\left|\tau_n'(1+0)-\tau_n'(1-0)\right|\left(\left|\cos t\right|+1\right)\le \frac{2}{t^2}. \tag{17}$$

Из неравенства (17) следует, что

$$a(\tau_n)=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty}\left|\int_0^\infty \tau_n(v)\cos vt dv\right| dt < \frac{C_4}{n} \tag{18}$$

и

$$\int_{|t|\ge\alpha}\left|\int_0^\infty \tau_n(v)\cos vt dv\right| dt \le \frac{4}{\alpha}. \tag{19}$$

Далее имеем:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left|\int_0^\infty \tau_n(v)\cos vt dv\right| dt = 2\int_0^\alpha\left|\int_0^\infty\left(\Phi_n(v)-R_n(v)\right)\cos vt dv\right| dt \le$$

$$\le 2\left(\int_0^\alpha\left|\int_0^\infty \Phi_n(v)\cos vt dv\right| dt+\int_0^\alpha\left|\int_0^1 \Phi_n(v)\cos vt dv\right| dt+\int_0^\alpha\left|\int_0^1 \tau_n(v)\cos vt dv\right| dt\right). \tag{20}$$

В силу ограниченности $\tau_n(v)$

$$\int_0^\alpha\left|\int_0^1 \tau_n(v)\cos vt dv\right| dt < \int_0^\alpha\left(\int_0^1\left|\tau_n(v)\right| dv\right) dt < C_5. \tag{21}$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству (9), и учитывая, что $\int\limits_0^{\alpha} \frac{\sin vt}{t} dt < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\int\limits_0^{\alpha} \left| \int\limits_0^{\infty} \Phi_n(v) \cos vt dv \right| dt < \pi \Phi_n(0) = \pi \left(1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} \right). \tag{22}$$

Если $\lim\limits_{\vartheta \to \infty} v^2 \psi(v) = \infty$, то $v^2 \psi(v)$ возрастает и

$$-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} < 2. \tag{23}$$

Если же $\lim\limits_{\vartheta \to \infty} v^2 \psi(v) = C > 0$, то $v^2 \psi(v)$ можно представить в виде суммы $v^2 \psi(\vartheta) = C + h(\vartheta)$, где $h(v)$ выпукла вниз и $\lim\limits_{\vartheta \to \infty} h(v) = 0$. Значит, $(v^2 \psi(v))' = C - h(v) + vh'(v) > 0$ или $3v^2 \psi(v) + v^3 \psi'(v) > 0$.

Отсюда

$$-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)} < 3. \tag{24}$$

Так как $|\Phi_n(v)| = \Phi_n(v) < \Phi_n(0) = 1 - \frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}$, то, учитывая (23), (24),

$$\int\limits_0^{\alpha} \left| \int\limits_0^{1} \Phi_n(v) \cos vt dv \right| dt < \int\limits_0^{\alpha} \left(\int\limits_0^{1} |\Phi_n(v)| dv \right) dt < C_6. \tag{25}$$

Из неравенств (19) – (25) следует (5). Учитывая (5), (15), (18), по лемме 2 получаем равенство (2).

Теорема доказана.

В случае $\beta \neq 0$ при помощи леммы 2 рассуждениями, близкими к проведенным выше, можно получить теоремы.

Теорема 2. Если $\psi \in \mathfrak{M}$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{\psi(v)}{\vartheta} dv < \infty$, функция $g(v)$ выпукла вниз и $\lim\limits_{\vartheta \to \infty} g(v) = \infty$, то при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \psi(n) A(\tau_n) + O\left(\frac{\psi(n)}{n} \right).$$

Теорема 3. Если $\psi \in \mathfrak{M}$, функция $v^2 \psi(v)$ выпукла вверх, $\int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv < \infty$ и $\int\limits_1^{n} v\psi(v) dv = O\left(n^2 \psi(n) \right)$, то при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; S_{\frac{2\pi}{n}} \right) = \psi(n) A(\tau_n) + O\left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Если $\psi(\cdot)$ такова, что порядок приближения суммами Стеклова на $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ близок к порядку насыщения, при нахождении асимптотических равенств для величины (1) воспользуемся леммой 1.6 из работы [5].

Лемма. Пусть $\psi \in F_1$, т.е. $\psi \in \mathfrak{M}$ и при $n \to \infty$ справедливы соотношения

$$n\left|\psi'(n)\right| = O\big(\psi(n)\big);\int_n^{\infty}\frac{\psi(n)}{v}dv = O\big(\psi(n)\big).$$

Если $\tau_n(\vartheta)$ имеет абсолютно непрерывную производную $\tau_n'(v)$ на $[0,1]$, $\tau_n(0)=0$ и сходятся интегралы $\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^1\frac{|\tau_n(v)|}{v}dv$ и $\int_0^1\frac{|\lambda(v)|}{1-v}dv$, то при $n\to\infty$ справедливо равенство

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};U(\lambda)\right) = \psi(n)\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^1\frac{|\tau_n(v)|}{v}dv +$$

$$+O\left(\psi(n)\left(\int_0^1\frac{|\lambda(v)|}{1-v}dv + \int_0^1 v(1-v)\left|\tau_n''(v)\right|dv + \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^1\frac{|\tau_n(v)|}{v}dv + 1\right)\right). \tag{26}$$

Теорема 4. Пусть функция $\psi \in \mathfrak{M}$ такова, что $g(v) = \vartheta^2\psi(v)$ выпукла и $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} v^2\psi(v) = C > 0$ или если $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} g(v) = \infty$, то функция выпукла вверх и, кроме того,

$$\frac{1}{\psi(n)}\int_n^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv = O(1), \tag{27}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n^2\psi(n)}\int_1^n \vartheta\psi(v)dv = \infty. \tag{28}$$

Тогда при $n\to\infty$ справедливо равенство

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_{\frac{2\pi}{n}}\right) = \frac{\pi}{3}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{n^2}\int_1^n v\psi(v)dv + O(\psi(n)). \tag{29}$$

Доказательство. Из соотношения (28) следует, что

$$n\left|\psi'(n)\right| = O\big(\psi(n)\big), \tag{30}$$

а из (27) и (29) делаем вывод, что $\psi \in F_1$.

Докажем, что функция

$$\tau_n(v) = \begin{cases} \dfrac{n^3}{\pi\psi(n)}\left(\left(\sin\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\psi(1) + \left(\dfrac{\pi}{n} - \sin\dfrac{\pi}{n}\right)\big(\psi'(1)-\psi(1)\big)\right)v^2 + \\ +\dfrac{n^2}{\pi\psi(n)}\left(\left(\dfrac{\pi}{n} - \sin\dfrac{\pi}{n}\right)\big(\psi'(1)-2\psi(1)\big) - \left(\sin\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\psi(1)\right)v; & v\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{n}}\right), \\ \left(1-\dfrac{(\sin\pi v)}{\pi v}\right)\dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{n}},1\right], \\ \dfrac{\psi(nv)}{\psi(n)}, & v\in\left[1,+\infty\right], \end{cases}$$

удовлетворяет условиям леммы.

Из определения видно, что $\tau_n(v)$ и $\tau_n'(v)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$.

Поскольку $\lambda_n(v)=\dfrac{\sin \pi v}{\pi v}$, то в силу ограниченности подынтегральной функции

$$\int_0^1 \frac{|\lambda_n(v)|}{1-v}dv=\int_0^1 \frac{\sin \pi v}{\pi v(1-v)}dv=O(1). \tag{31}$$

Используя определение функции $\tau_n(v)$, имеет

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|\tau_n(v)|}{v}dv=O\left(\frac{1}{n^2\psi(n)}\right). \tag{32}$$

Так как $\int_1^n v^3\psi(v)dv=O\left(n^4\psi(n)\right)$, то

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{|\tau_n(v)|}{v}dv=\frac{1}{\psi(n)}\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\left(1-\dfrac{\sin \pi v}{\pi v}\right)\psi(nv)}{v}dv=\frac{1}{\psi(n)}\int_1^n \frac{\left(1-\dfrac{\sin\frac{\pi v}{n}}{\frac{\pi v}{n}}\right)\psi(v)}{v}dv=$$
$$=\frac{1}{\psi(n)}\int_1^n\left(\frac{\pi^2v^2}{3!n^2}-\frac{\pi^4v^4}{5!n^4}+\ldots\right)\psi(v)dv=\frac{\pi^2}{6n^2\psi(n)}\int_1^n v\psi(v)dv+ \tag{33}$$
$$+O\left(\frac{1}{n^4\psi(n)}\int_1^n v^3\psi(v)dv\right)=\frac{\pi^2}{6n^2\psi(n)}\int_1^n v\psi(v)dv+O(1).$$

Из соотношений (31) – (33) следует, что интегралы $\int_0^1 \frac{|\lambda_n(v)|}{1-v}dv$ и $\int_0^1 \frac{|\tau_n(v)|}{v}dv$ сходятся.

Таким образом, все условия леммы выполнены. Значит, для $\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_{\frac{2\pi}{n}}\right)$ имеет место равенство (26).

Поскольку $\int_0^{\frac{2}{\pi n}} \frac{|\tau_n(v)|}{v}dv<\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|\tau_n(v)|}{v}dv$, то

$$\int_0^{\frac{2}{\pi n}} \frac{|\tau_n(v)|}{v}dv=O\left(\frac{1}{n^2\psi(n)}\right). \tag{34}$$

Используя определение функции $\tau_n(v)$, находим, что

$$\int_0^1 v(1-v)\left|\tau_n''(v)\right|dv=O(1). \tag{35}$$

Подставляя оценки (31), (34), (35) в (26), получаем асимптотическое равенство (29). Теорема доказана.

Теорема 5. Если функция $g(v)$ выпукла вниз, $\lim\limits_{\vartheta\to\infty} g(v)=0$, а интеграл $\int\limits_1^\infty \vartheta\psi(\vartheta)d\vartheta$ расходится, то при $n\to\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_{\frac{2\pi}{n}}\right)=\frac{\pi}{3}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{n^2}\int\limits_1^n v\psi(v)dv+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Для доказательства этой теоремы нужно повторить те же рассуждения, что и в предыдущем случае, и учесть, что $\psi(n)=o(v)^{-2}$.

Если $\psi(v)$ такова, что для величины (1) на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ наступает насыщение, поступая так же как при доказательстве теоремы 2.5 работы [6], получаем утверждение.

Теорема 6. Пусть $v\psi(v)$ суммируема на $[1,\infty)$, а $g(v)$ выпукла вниз на $[1,\infty)$. Тогда при $n\to\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\varepsilon\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};S_{\frac{2\pi}{n}}\right)=\frac{\pi^2}{6n^2}\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\|f''\|+\gamma(n),$$

где

$$\gamma=\begin{cases}0\big(\psi(n)\ln n\big), & \text{если } k^4\psi(k) \text{ возрастает},\\ O\left(\dfrac{1}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\psi(k)k^4}{n-k}\right), & \text{если } k^4\psi(k) \text{ убывает}.\end{cases}$$

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи поведения на бесконечности функции $v^2\psi(v)$ при условии ее выпуклости.

Замечание. Для верхних граней уклонений сумм Стеклова, как и для сумм Рогозинского [6], можно получить аналоги теорем 1–6 в метрике L, а для верхних граней уклонений на классах $L^{\psi}_{\beta,p}$ – точные порядковые оценки в метрике L_s, $1<p,s<\infty$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец, А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1987. – 268 с.

2. Сапилиди, Т. М. Приближение функций классов Гельдера суммами Стеклова / Т. М. Сапилиди. – Киев, 1978. – 48 с.

3. Степанец, А. И. Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье / А. И. Степанец. – Киев, 1983. – 57 с.

4. Рукасов, В. И. Прибилжение периодических функций линейными средними и их рядов Фурье / В. И. Рукасов. – Киев, 1983. – 55 с.

5. Бушев, Д. Н. Приближение классов непрерывных функций суммами Зигмунда / Д. Н. Бушев. – Киев, 1984. – 64 с.

6. Ковальчук, И. Р. Приближение классов (ψ,β)-дифференцируемых функций полиномами Рогозинского / И. Р. Ковальчук // Приближение классов (ψ,β)-дифференцируемых функций полиномами Рогозинского и некоторые обратные теоремы. – Киев, 1988. – С. 3–47.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.06.2017

Kovalchuk I.R. **Class Approximation (ψ,β) of Differentiated Functions by Steklov's Summs**

The work is devoted to the study of approximative properties of Steklov sums on the classes of differentiable functions. In particular, the asymptotic equalities for the exact upper bounds of the approximations of the classes (ψ,β)-differentiable functions by Steklov sums in the uniform metric are found.