МАТЭМАТЫКА

УДК 519.688

А.Н. Башняков[1], В.В. Пичкур[2], А.А. Полищук[3], Я.Н. Линдер[4]

[1]канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник лаборатории моделирования и оптимизации Киевского национального университета имени Т. Шевченко

[2]д-р физ.-мат. наук, доц. каф. моделирования сложных систем Киевского национального университета имени Т. Шевченко

[3]канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник лаборатории моделирования и оптимизации Киевского национального университета имени Т. Шевченко

[4]канд. физ.-мат. наук, ассистент каф. информационных систем Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

e-mail: alexander.bashnyakov@gmail.com

О МЕТОДЕ АДАПТИВНОЙ КОРРЕКЦИИ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Предлагается метод решения задачи коррекции угловых скоростей твердого тела по эталонным измерениям ориентации. Математическая модель представляется в форме кинематических уравнений с использованием кватернионов. Особенности поставленной задачи следующие: отсутствует априорная информация о шумах, действующих на систему; разработанный алгоритм должен иметь высокое быстродействие; коррекция должна осуществляться по ходу функционирования системы. В основе подхода лежит разработанный авторами адаптивный метод идентификации параметров по дискретным измерениям вектора состояния. Идея метода состоит в том, что при получении эталонной информации параметры выбираются из условия минимума отклонения соответствующего решения от эталонных значений. При этом используется линеаризация решений системы с помощью матрицы чувствительности, а также подходы оптимизационных методов второго порядка. Вычислительный эксперимент показывает эффективность предложенного подхода.

Задачи анализа, управления, оптимизации и идентификации динамики твердого тела широко представлены в научной литературе. Это связано с существенным прикладным значением таких задач, поскольку они возникают в проблематике построения систем управления летательными аппаратами, в задачах навигации и других прикладных областях.

В частности, к такой области принадлежит задача коррекции угловых скоростей твердого тела. Она возникает в системах управления летательными аппаратами и связана с необходимостью уточнения данных об угловых скоростях в динамике [1; 2].

Для указанной задачи существует ряд особенностей: отсутствует априорная информация о шумах, действующих на систему; разработанный алгоритм должен иметь высокое быстродействие; коррекция должна осуществляться по ходу функционирования системы.

Поэтому такие задачи целесообразно решать с применением адаптивного подхода. Адаптивные методы являются эффективными при решении различных задач управления, стабилизации, оценки состояния, идентификации параметров, обработки информации [3–8].

В работе предлагается адаптивный метод параметрической идентификации, который применяется для задачи адаптивной коррекции угловых скоростей твердого тела. В основе метода лежит понятие матрицы чувствительности и идеи оптимизационных методов второго порядка. Разработанные итерационные процедуры апробированы при проведении вычислительного эксперимента.

Метод адаптивной идентификации с использованием матрицы чувствительности

Пусть задана динамическая система вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x,p,t), t \in [0,T], \quad (1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазовых координат, $p = (p_1, p_2, ..., p_m)^*$ – вектор параметров, $f(x,p,t) = (f_1(x,p,t), f_2(x,p,t), ..., f_n(x,p,t))^*$ – вектор-функция правых частей системы (1), непрерывно дифференцируемая по переменным x, p и непрерывная по переменной t на $R^n \times R^m \times [0,T]$, x_0 – вектор начальных условий из R^n. Обозначим $x(t,p)$ – решение задачи Коши (1), (2). По теореме о непрерывной дифференцируемости решения системы дифференциальных уравнений по параметру функция $x(t,p)$ является непрерывно дифференцируемой по переменной p.

В моменты времени $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ... < t_{N+1} = T$ мы имеем измерения $y^{(i)} = y(t_i)$ вектора фазовых координат $x(t_i)$, $i = 1,2,\ldots,N$. Информация о погрешности наблюдения, а также о характере этой погрешности отсутствует. Задача состоит в том, чтобы определить значение параметра p, которое соответствует наблюдениям $y^{(i)}$ в моменты времени t_i.

Для решения поставленной задачи будем использовать адаптивный подход. Мы считаем, что на промежутках (t_k, t_{k+1}) параметр p принимает постоянные значения, $k = 0,1,...N$. В моменты времени t, которые соответствуют различным интервалам, значения параметра p могут отличаться. В моменты $t = t_i$ известна реализация $x(t,p)$, которая соответствует значению параметра $p = p^{(i-1)}$. Ищем такое значение параметра $p^{(i)}$, которое минимизирует критерий качества вида

$$J(p) = \left\langle Q^{(i)}(x(t_i,p) - y^{(i)}), x(t_i,p) - y^{(i)} \right\rangle \to \min_p. \quad (3)$$

Здесь $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение в R^n, $Q^{(i)}$ – симметричные положительно определенные матрицы размерности $n \times n$, $i = 1,2,\ldots,N$.

Используем свойства матрицы чувствительности [9]. Зададим возмущение параметра p в точке $p^{(i-1)}$ на величину h и запишем решение системы (1) с учетом линейного приближения:

$$x\left(t_i, p^{(i-1)} + h\right) = x(t_i, p) + U(t_i, p^{(i-1)})h + r_i(h). \quad (4)$$

Здесь $U(t) = U(t, p^{(i-1)})$ – матрица чувствительности системы (1), которая соответствует решению $x(t,p)$ при $p = p^{(i-1)}$, h принадлежит R^m, $r_i(h)$ бесконечно малая высших порядков малости по отношению к h при $h \to 0$. Матрица чувствительности удовлетворяет матричное дифференциальное уравнение [9]:

$$\frac{dU(t)}{dt} = L(t,p)U(t) + g(t), t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (5)$$

$$U(t_i) = 0, \quad (6)$$

где $L(t,p) = \dfrac{\partial f(x(t,p),p,t)}{\partial x}$, $g(t,p) = \dfrac{\partial f(x(t,p),p,t)}{\partial p}$, $p = p^{(i-1)}$.

Обозначим $y^{(i)} - x(t_i, p^{(i-1)}) = \Delta x^{(i)}$. Опуская в (4) функцию $r_i(h)$, подставляем линейное приближение к $x\left(t_i, p^{(i-1)} + h\right)$ в критерий качества (3). Получаем квадратичный функционал вида:

$$J(h) = \left\langle Q^{(i)}(x(t_i,p) + U(t_i)h - y^{(i)}), x(t_i,p) + U(t_i)h - y^{(i)} \right\rangle =$$
$$= \left\langle Q^{(i)}(U(t_i)h - \Delta x^{(i)}), U(t_i)h - \Delta x^{(i)} \right\rangle =$$
$$= \left\langle Q^{(i)}\Delta x^{(i)}), \Delta x^{(i)} \right\rangle + \left\langle U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i)h, h \right\rangle - 2\left\langle U(t_i)h, Q^{(i)}\Delta x^{(i)} \right\rangle.$$

Находим параметр $h = h^{(i)}$ с условиями минимума $J(h)$. Применяя необходимые условия экстремума $\frac{\partial J(h^{(i)})}{\partial h} = 0$, получаем для нахождения $h^{(i)}$ систему линейных алгебраических уравнений

$$U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i)h = U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}. \quad (7)$$

Предположим, что матрица $U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i)$ является невырожденной. Тогда

$$h^{(i)} = (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i))^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}. \quad (8)$$

Исходя из (1), (2), (5), (6), (8), метод можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\ x(t_0) &= x_0, i = 0; x(t_i) = x\left(t_i, p^{(i-1)}\right), i = 1, \ldots N, \\ \frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\ p^{(i+1)} &= p^{(i)} + (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i))^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}, p^{(0)} = p_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $i = 0, 1, \ldots N$. Опишем соответствующий алгоритм:

Шаг 1. Выбираем начальное приближение p_0. На интервале $[0, t_1]$ решаем задачу (1), (2) при $p = p_0$. Подставляем решение в (5), (6), находим матрицу чувствительности $U(t_1)$. Находим

$$p^{(1)} = p_0 + (U^*(t_1)Q^{(1)}U(t_1))^{-1}U^*(t_1)Q^{(1)}\Delta x^{(1)}.$$

Шаг 2. На i-м шаге, $i = 1, \ldots N$, на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ решаем задачу (1), (2) при $p = p^{(i)}$. Находим матрицу чувствительности $U(t_1)$ как решение задачи (5), (6) при $p = p^{(i)}$. Определяем

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} + (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i))^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}.$$

Если матрица $U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i)$ особая или близка к особой, то можно применить регуляризацию метода (9). Для этого вводится параметр регуляризации $\varepsilon > 0$, и для него получаем следующий метод

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\ x(t_0) &= x_0, i = 0; x(t_i) = x\left(t_i, p^{(i-1)}\right), i = 1, \ldots N, \\ \frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\ p^{(i+1)} &= p^{(i)} + (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i) + \varepsilon I)^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}, p^{(0)} = p_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $i = 0,1,...N$, I – $m \times m$-единичная матрица.

Обозначим

$$p(i,s) = p^{(i)} + s\left((U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i) + \varepsilon I)^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta x^{(i)}\right),$$

где $s > 0$ – параметр. Получим еще одну модификацию метода (9):

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x, p^{(i)}, t), \\
x(t_0) &= x_0, i = 0; x(t_i) = x\left(t_i, p^{(i-1)}\right), i = 1,...N, \\
\frac{dU(t)}{dt} &= L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}), U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \\
\min_{s\in[0,1]} & J\left(p(i,s)\right) = J\left(p(i, s(i))\right), \\
p^{(i+1)} &= p(i, s(i)), p^{(0)} = p_0, \\
i &= 0,1,...N.
\end{aligned} \tag{11}$$

Метод коррекции угловых скоростей

На основе (9) предлагается метод решения задачи коррекции угловых скоростей твердого тела по эталонным измерениям его ориентации. Суть предложенного метода состоит в адаптивном выборе параметров системы так, чтобы наиболее быстро настроиться на эталонные значения. Разработанный алгоритм можно использовать при настройке параметров системы в том случае, когда теряется эталонный сигнал (система функционирует автономно). При возобновлении эталонного сигнала система будет автоматически скорректирована, компенсируя погрешности, которые могли возникнуть как в процессе интегрирования самой системы, так и в результате зашумления данных из датчиков.

Реализация алгоритма предусматривает дополнительный подбор параметров, таких как шаг и метод интегрирования, а также частота поступления тестового сигнала.

Введем следующие обозначения: $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор кватернионов, $\|\Lambda\|^2 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловых скоростей. Кинематические уравнения, которые описывают ориентацию твердого тела, можно записать в виде системы дифференциальных уравнений [2]:

$$2\frac{d\lambda_0}{dt} = -\omega_1\lambda_1 - \omega_2\lambda_2 - \omega_3\lambda_3,$$

$$2\frac{d\lambda_1}{dt} = \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_2 - \omega_2\lambda_3,$$

$$2\frac{d\lambda_2}{dt} = \omega_2\lambda_0 - \omega_3\lambda_1 + \omega_1\lambda_3,$$

$$2\frac{d\lambda_3}{dt} = \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_1 - \omega_1\lambda_2.$$

В моменты времени $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ... < t_{N+1} = T$ известны измерения $y^{(i)} = \Lambda(t_i)$ вектора кватернионов. Задача состоит в том, чтобы на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ осуществить коррекцию угловых скоростей так, чтобы они адекватно отвечали текущей ориентации твердого тела. Для поставленной задачи применим метод (9).

Обозначим матрицу чувствительности

$$U(t) = \left(u_{ij}(t)\right),\ u_{ij} = \frac{\partial\lambda_i}{\partial p_j},\ \text{где } i = 0,1,2,3,\ j = 1,2,3.$$

Тогда предлагаемый метод будет иметь вид:

$$2\frac{d\lambda_0}{dt} = -(\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_1 - (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_2 - (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_3,$$
$$2\frac{d\lambda_1}{dt} = (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_0 + (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_2 - (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_3,$$
$$2\frac{d\lambda_2}{dt} = (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_0 - (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_1 + (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_3,$$
$$2\frac{d\lambda_3}{dt} = (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_0 + (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_1 - (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_2,$$
$$t \in [t_i, t_{i+1}],\ \Lambda(0) = \Lambda_0;\ \Lambda(t_i) = \Lambda\left(t_i, p^{(i-1)}\right), i = 1,\ldots N,$$
$$2\frac{du_{0j}}{dt} = -(\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{1j} - (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{2j} - (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{3j} + f_{0j}(t),$$
$$2\frac{du_{1j}}{dt} = (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{0j} + (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{2j} - (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{3j} + f_{1j}(t),$$
$$2\frac{du_{2j}}{dt} = (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{0j} - (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{1j} + (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{3j} + f_{2j}(t),$$
$$2\frac{du_{3j}}{dt} = (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{0j} + (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{1j} - (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{2j} + f_{3j}(t),$$
$$j = 1,2,3,\ t \in [t_i, t_{i+1}],$$
$$p^{(i+1)} = p^{(i)} + (U^*(t_i)Q^{(i)}U(t_i))^{-1}U^*(t_i)Q^{(i)}\Delta\Lambda^{(i)},\ p^{(0)} = p_0.$$

Здесь

$$f_{01}(t) = -\lambda_1(t),\ f_{02}(t) = -\lambda_2(t),\ f_{02}(t) = -\lambda_3(t),$$
$$f_{11}(t) = \lambda_0(t),\ f_{12}(t) = -\lambda_3(t),\ f_{13}(t) = \lambda_2(t),$$
$$f_{21}(t) = \lambda_3(t),\ f_{22}(t) = \lambda_0(t),\ f_{23}(t) = -\lambda_1(t),$$
$$f_{31}(t) = -\lambda_2(t),\ f_{32}(t) = \lambda_1(t),\ f_{33}(t) = \lambda_0(t),$$

$p^{(i)} = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})^*$, $\Delta\Lambda^{(i)} = y^{(i)} - \Lambda(t_i, p^{(i)})$, Λ_0 – известная начальная ориентация, $Q^{(i)}$ – симметричные положительно определенные матрицы размерности 3×3, $i = 1,2,\ldots,N$.

Для тестирования алгоритма создана программа. Входными являются такие данные:

1. Эталонные углы Крылова, которые получаются из системы контрольных измерений.
2. Покоординатная точность приближения к эталонным углам Крылова.
3. Начальные значения углов Крылова.

Начальные углы Крылова отображаются в соответствующие значения в системе кватернионов. Для этого применяются стандартные формулы соответствия между этими системами. Полученные в результате работы алгоритма значения кватернионов переводились в углы Крылова для вычисления отклонения от заданных углов. Результат вычислений записывался в файл в виде 4-мерных векторов, где первая координата – время (условное время от начала вычислений), остальные координаты – текущие углы Крылова. При этом последняя строка в файле содержит углы Крылова, которые покоординатно отличаются от эталонных на величину покоординатной точности. Изменяя начальные, эталонные углы Крылова и точность вычислений, оценивали эффективность алгоритма.

Алгоритм протестирован при различных входных данных. Например, при параметрах: текущие углы Крылова (0.5; 0.7; 0.2); эталонные углы Крылова (0.01; 0.02; 0.01); допустимое покоординатное отклонение: до 0.01 за время 2.36 – получили углы Крылова с отклонением от эталонных с точностью до 0.01.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко, Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела / Л. Д. Акуленко. – Одесса : ОНУ, 2013. – 288 с.
2. Бранец, В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. Андриевский, Б. Р. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б. Р. Андриевский, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2000. – 475 с.
4. Гаращенко, Ф. Г. Адаптивный метод дистанционного обнаружения химических компонентов в растениях на основе градиентного похода / Ф. Г. Гаращенко, В. Т. Матвиенко // Мехатроника, автоматика, управление. – 2013. – № 2. – С. 34–37.
5. Пупков, К. А. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов, А. И. Гаврилов. – М. : МГТУ им. Баумана, 2002. – 744 с.
6. Фрадков, А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы / А. Л. Фрадков. – М. : Наука, 1990. – 296 с.
7. Цыпкин, Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1968. – 400 с.
8. Sastry, S. Adaptive control: stability, convergence, and robustness / S. Sastry, M. Bodson. – New Jersey : Prentice Hall, 1989. – 196 p.
9. Розенвассер, Е. Н. Чувствительность систем управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. – М. : Наука, 1981. – 464 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 29.06.2017

Bashniakov A., Pichkur V., Polishchuk A., Linder Y. **On the Method of Adaptive Correction of Corner Speeds of Solid Body Using the Matrix of Sensitivity**

In the article, the method of solving the problem of a solid body angular velocities correction by reference orientation measurements is proposed. The mathematical model is represented in the form of kinematic equations using quaternions. The specific features of the task are as follows: there is no a priori information about the noise acting on the system; the developed algorithm should have high performance; correction must be carried out as the system progresses. The approach is based on the adaptive method developed by the authors for identifying parameters from discrete measurements of the state vector. The idea of the method is that during reference information acquisition, the parameters are selected from the condition of the corresponding solution minimum deviation from the reference values. In this case, the linearization of system solutions using the sensitivity matrix, as well as the approaches of second-order optimization methods are used. Computational experiment shows the effectiveness of the proposed approach.