УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик[1], М.Н. Жуковец[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: matysikoleg@mail.ru[1]

ПРАВИЛО ОСТАНОВА В ПРОЦЕССЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным и самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правил останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова. Решен численный модельный пример.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный метод:

$$x_{n+1} = (E+\alpha A)^{-1}(E-\alpha A)x_n + 2\alpha(E+\alpha A)^{-1}y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$x_{n+1,\delta} = (E+\alpha A)^{-1}(E-\alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha(E+\alpha A)^{-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Под сходимостью метода (3) далее понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

Для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближённой правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокопредставимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности и найден априорный момент останова [1]. Также в [1] изучен случай неединственного решения операторного уравнения (1), исследована сходимость метода итераций (3) в энергетической норме гильбертова пространства и обоснована возможность применения к методу (3) правила останова по поправкам.

2. Правило останова по невязке. В случае когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, итерационный метод (3) становится неэффективным, так как невозможно получить оценку погрешности и определить априорно момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки, аналогичным [2–4]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon,\ (n < m),\ \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon,\ \varepsilon = b\delta,\ b > 1. \tag{4}$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\left\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{(1-\alpha\lambda)^n}{(1+\alpha\lambda)^n}\right] \ge 0$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left|g_n(\lambda)\right| \le 2n\alpha,\ n > 0, \tag{5}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le 1,\ n > 0, \tag{6}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ n \to \infty,\ \forall\lambda \in (0, M], \tag{7}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le s^s (4n\alpha)^{-s},\ n > 0,\ 0 \le s \le s_0,\ s_0 = \infty. \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$. *Тогда для любого* $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty$.

Доказательство. Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A, получим

$$(E - Ag_n(A))w = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda))\, dE_\lambda w = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda))\, dE_\lambda w + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda))\, dE_\lambda w.$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \left(\dfrac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n$ и $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right| \le q(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in (0, M]$ и $\alpha > 0$, то $\left\|\int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w\right\| \le q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda w\right\| \le q^n(\varepsilon_0)\|w\| \to 0,\ n \to \infty$.

Из (6) имеем $\left\|\int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda w\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda w\right\| = \left\|E_{\varepsilon_0} w\right\| \to 0,\ \varepsilon_0 \to 0$ в силу свойств спектральной функции [5, с. 302]. Следовательно, $(E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s \left\| A^s \left(E - Ag_n(A)\right) v \right\| \to 0$ *при* $n \to \infty,\ 0 \leq s < \infty.$

Доказательство. Так как верно равенство (8), то

$$n^s \left\| A^s \left(E - Ag_n(A)\right) \right\| \leq n^s \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s \left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \leq \gamma_s, \text{ где } \gamma_s = \left(\frac{s}{4\alpha}\right)^s.$$

Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [6, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n \to \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|,\ n = 1,2,\ldots$, ограничены не зависящей от n постоянной.

Возьмем в качестве плотного подмножества в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + 1$. Тогда для каждого $v = Aw \in R(A)$ имеем

$$n^s \left\| A^s \left(E - Ag_n(A)\right) v \right\| = n^s \left\| A^{s+1} \left(E - Ag_n(A)\right) w \right\| \leq n^s \left(\frac{s+1}{4\alpha}\right)^{s+1} n^{-(s+1)} \|w\| =$$

$$= \gamma_{s_1} n^{-1} \|w\| \to 0,\ n \to \infty,$$

так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p \to \infty$ *имеем* $w_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right) v_0 \to 0,$ то $v_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right) v_0 \to 0$.

Доказательство. В силу (6) последовательность v_p ограничена $\|v_p\| \leq \|v_0\|,\ p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $v_p \rightharpoonup v, \left(p \in N' \subseteq N\right)$, тогда имеем $Av_p \rightharpoonup Av, \left(p \in N'\right)$. Но по условию $w_p = Av_p \to 0,\ p \to \infty$, следовательно, $Av = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $v = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_p\|^2 &= \left(v_p, \left(E - Ag_{n_p}(A)\right) v_0\right) = \left(v_p, v_0\right) - \left(v_p, Ag_{n_p}(A) v_0\right) = \\ &= \left(v_p, v_0\right) - \left(Av_p, g_{n_p}(A) v_0\right) = \left(v_p, v_0\right) - \left(w_p, g_{n_p}(A) v_0\right) \to \left(v, v_0\right) = 0, \end{aligned}$$

так как $w_p \to 0,\ p \to \infty,\ v = 0$ и по условию (5) $\left\| g_{n_p}(A) \right\| \leq 2n\alpha \leq 2\bar{n}\alpha$. Следовательно, $\|v_p\| \to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $v_p \to 0,\ p \to \infty.$ Лемма 3 доказана.

Используем леммы 1–3 при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0.$

Доказательство. По индукции легко показать, что выполняется равенство $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^n (E + \alpha A)^{-n}\right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \quad (9)$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0,\ n \to \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = n\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, n \to \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le 2n\alpha\delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le b\delta,\ b > 1$, и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \le (b+1)\delta. \quad (15)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \ge (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge (b-1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \ge (b-1)\delta$ или $(m-1)\delta \le \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0, \delta \to 0$ (так как из (12) $\sigma_m \to 0,\ m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя (9), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le \|(E - Ag_m(A))x\| + 2m\alpha\delta \to 0$$

при $m \to \infty, \delta \to 0$, так как из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \to 0, m \to \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \to 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x, \delta_n \to 0$. Действительно, из (15) имеем $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \le (b+1)\delta_n \to 0, \delta_n \to 0$. Отсюда по лемме 3 получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0, \delta_n \to 0$. Поэтому

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \le \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 2m\alpha\delta_n \to 0, \delta_n \to 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \le 1 + \frac{s+1}{4\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + 2\alpha\left\{1+\frac{s+1}{4\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta. \qquad (17)$$

Доказательство. Так как $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\left\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\right\| = \left\|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\right\| = \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^{m-1} dE_\lambda z\right\| \le$$

$$\le (s+1)^{s+1}\left[4(m-1)\alpha\right]^{-(s+1)}\|z\|$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta \le (s+1)^{s+1}\left[4(m-1)\alpha\right]^{-(s+1)}\|z\|$, отсюда $m \le 1+\frac{s+1}{4\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{1/(s+1)}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\left\|(E - Ag_m(A))x\right\| \le \left\|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\right\|^{s/(s+1)}\left\|(E - Ag_m(A))z\right\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \left\|A(E - Ag_m(A))x\right\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \text{ (смотреть (15))}.$$

Так как соотношение (9) справедливо для любых n, то

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \left\|(E - Ag_m(A))x\right\| + \left\|g_m(A)(y_\delta - y)\right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} +$$

$$+ 2\alpha\left\{1+\frac{s+1}{4\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Порядок оценки* (17) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ *и, как следует из [3], он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка* $s > 0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истоко-представимость точного решения отсутствует, останов по малости невязки (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.*

3. Численный пример. В пространстве $L_2(0,1)$ рассматривается некорректная модельная задача в виде уравнения $\int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds = y(t),\quad 0 \le t \le 1$ с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s),\, 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t),\, 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$ точной правой частью $y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ и точным решением $x(t) = t(t-1)$. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\widetilde{y}_i$, $i=\overline{1,m}$, полученные следующим образом: $\widetilde{y}_i = [\,y(t_i)\cdot 10^k + 0{,}5] / 10^k$, где $y(t_i)$ – значения функции $y(t)$ в точках $t_i = ih$, $i=\overline{1,m}$, $h = 1/m$. Квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 4$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Заменим интеграл в уравнении квадратурной суммой с узлами $s_j = jh$, $j=\overline{1,m}$, $h = 1/m$, т.е. $\int\limits_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds \approx \sum\limits_{j=1}^{m} K(t,s_j)hx_j$. Получим СЛАУ относительно приближенного решения $\sum\limits_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j = \widetilde{y}_i$, $i=\overline{1,m}$. Выберем $m = 32$ и будем решать полученную систему методом итераций (3), дискретная форма записи которого имеет вид:

$$x_i^{(n+1)} + \alpha\sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)x_j^{(n+1)}h = x_i^{(n)} - \alpha\sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)x_j^{(n)}h + 2\alpha\widetilde{y}_i,\ \ i=\overline{1,m}.$$

Для решения предложенной задачи воспользовались правилом останова по невязке с уровнем останова $\varepsilon = 1{,}5\delta$. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности рассматриваемым неявным итерационным методом при $\alpha = 9$ требуется только одна итерация.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Об одном неявном итеративном методе решения операторных уравнений / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 4. – С. 38–42.

2. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

4. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач : монография / О. В. Матысик ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.

5. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.

6. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.03.2018

Matysik O.V., Zhukovec S.V. **The Rule of Stopping in the Process of Calculations for the Method of Iterations of the Implicit Type of Solution of Linear Operator Equations**

In the Hilbert space for solving linear equations with affirmative limited and self–conjugate operator the implicit iteration method is proposed. For the proposed method, the application of stopping rules on residuals is justified, which makes the iterative method under consideration also effective when there is no information about the source-like representability of the exact solution. The convergence of the iterative method is proved, the error of the method is estimated and the estimation for the error is obtained. A numerical model example is solved.