ФІЗІКА

УДК 539.12

О.В. Веко[1], Я.А. Войнова[2], Е.М. Овсиюк[3], В.М. Редьков[4]

[1]*учитель физики гимназии г. Калинковичи*

[2]*учитель физики Качищанской средней школы Ельского района*

[3]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина*

[4]*д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник лаборатории теоретической физики Института физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси*

e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

ЧАСТИЦА ДИРАКА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ НА ФОНЕ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Для свободной частицы Дирака в квазидекартовой системе координат (x, y, z) *пространства Лобачевского существует специальный тип состояний, когда составляющие квазиимпульса частицы вдоль осей* x, y *равны нулю: эти решения не чувствуют возникающего из-за геометрии пространства эффективного потенциального барьера вдоль оси* z, *идеально отражающего дираковскую частицу во всех других состояниях. В работе исследуется этот случай в присутствии обобщенного однородного электрического поля на фоне пространства Лобачевского. Геометрия существенно влияет на эффективное проявление электрического поля, причем оно наиболее заметно при рассмотрении больших масштабов расстояний. Физическая задача описывается системой из двух связанных уравнений первого порядка, которые методом исключения приводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с комплекснозначными потенциалами; построены и исследованы возможные решения этого уравнения в терминах вырожденных гипергеометрических функций. Показано, что комбинированием исходных уравнений первого порядка можно привести задачу к уравнениям второго порядка с вещественными потенциалами с двумя регулярными особыми точками и одной нерегулярной особенностью на бесконечности ранга 2, т.е. к конфлюэнтному уравнению Гойна. Получены решения Фробениуса для этих уравнений, анализ сходимости возникающих степенных рядов указывает на их определенность и корректность во всей физической области переменной* $z \in (-\infty, +\infty)$.

Введение

Для свободной частицы Дирака в квазидекартовой системе координат (x, y, z) пространства Лобачевского существует специальный тип состояний, когда составляющие квазиимпульса частицы вдоль осей x, y равны нулю: эти решения не чувствуют возникающего из-за геометрии пространства эффективного потенциального барьера вдоль оси z, идеально отражающего дираковскую частицу во всех других состояниях [1–7]. В настоящей работе исследуется этот случай в присутствии обобщенного однородного электрического поля на фоне пространства Лобачевского. Геометрия существенно влияет на эффективное проявление электрического поля, причем оно наиболее заметно при рассмотрении больших масштабов расстояний.

1. Постановка задачи

В отсутствие электрического поля для частицы Дирака в квазидекартовой системе координат

$$dS^2 = dt^2 - e^{-2z}(dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad dV = e^{-2z}dxdydz \qquad (1)$$

существует специальный случай, когда составляющие импульса вдоль осей x, y равны нулю:

$$\Psi(t,z)=e^{-i\varepsilon t}e^{z}\left|\begin{matrix}F_1(z)\\F_2(z)\\F_3(z)\\F_4(z)\end{matrix}\right|,\quad F_4=\frac{\varepsilon-p}{M}F_2\,,\quad F_3=\frac{\varepsilon-p}{M}F_1\,,\quad p=+\sqrt{\varepsilon^2-M^2}\,. \qquad (2)$$

Уравнения для таких решений сводятся к следующим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-ip\right)F_1=0\quad\Rightarrow\quad F_1=C_1e^{+ipz}\,,\quad \left(\frac{\partial}{\partial z}+ip\right)F_2=0\quad\Rightarrow\quad F_2=C_2e^{-ipz}\,. \qquad (3)$$

Они приводят к двум легко интерпретируемым решениям:

$$\Psi_1(t,z)=e^{i\varepsilon t}\left|\begin{matrix}1\\0\\\dfrac{\varepsilon-p}{M}\\0\end{matrix}\right|e^{z}e^{+ipz}\,,\quad \Psi_2(t,z)=e^{i\varepsilon t}\left|\begin{matrix}0\\1\\0\\\dfrac{\varepsilon-p}{M}\end{matrix}\right|e^{z}e^{-ipz}. \qquad (4)$$

Характерно, что эти решения не чувствуют эффективного потенциального барьера, идеально отражающего дираковские частицы во всех других состояниях [2–7].

При обобщении этой задачи на случай присутствия внешнего электрического поля также существует аналогичный класс состояний

$$\Psi(t,z)=e^{-i\varepsilon t}e^{z}\left|\begin{matrix}F_1(z)\\F_2(z)\\F_3(z)\\F_4(z)\end{matrix}\right|. \qquad (5)$$

Используемое задание потенциала электрического поля здесь согласовано с геометрией пространства Лобачевского в координатах (1):

$$A_0(z)=\frac{E}{2}(e^{2z}-1)=A,\quad F_{30}=Ee^{2z}\,. \qquad (6)$$

Величина E может быть разных знаков в зависимости от направления электрического поля (и соответственно сила, действующая на электрон со стороны этого поля). Отметим, что в малой области переменной z оно переходит в обычное однородное поле в плоском пространстве; в области $z\to-\infty$ электрическое поле исчезает (но остается ненулевая постоянная в выражении для потенциала), а в области $z\to+\infty$ оно экспоненциально возрастает:

$$z\to-\infty,\qquad A_0(z)\to-\frac{E}{2}=\text{const},\quad F_{30}\to 0\,;$$
$$z\to-\infty,\quad A_0(z)\to\frac{E}{2}e^{2z}\to+\infty,\quad F_{30}\to Ee^{2z}\to+\infty\,. \qquad (7)$$

Это свидетельствует о том, что геометрия существенно влияет на эффективное проявление электрического поля; причем это наиболее заметно при рассмотрении расстояний больших масштабов. Для рассматриваемого случая (5) уравнение Дирака приводит к двум распадающимся системам:

$$\left[(\varepsilon - eA) - i\frac{d}{dz}\right]F_3 - MF_1 = 0, \quad \left[(\varepsilon - eA) + i\frac{d}{dz}\right]F_1 - MF_3 = 0\,; \tag{8}$$

$$\left[(\varepsilon - eA) - i\frac{d}{dz}\right]F_2 - MF_4 = 0, \quad \left[(\varepsilon - eA) + i\frac{d}{dz}\right]F_4 - MF_2 = 0\,. \tag{9}$$

Задача настоящей работы – исследовать аналитически этот наиболее простой класс решений уравнения Дирака в пространстве Лобачевского с учетом присутствия внешнего электрического поля (6).

2. Построение комплекснозначных решений

Очевидно, что можно построить два линейно независимых решения уравнения Дирака:

$$\Psi^{(1)}(t,z) = e^{-i\varepsilon t}e^{z}\begin{vmatrix} F_1(z) \\ 0 \\ F_3(z) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi^{(2)}(t,z) = e^{-i\varepsilon t}e^{z}\begin{vmatrix} 0 \\ F_2(z) \\ 0 \\ F_4(z) \end{vmatrix}; \tag{10}$$

они будут обобщать решения (4), полученные при отсутствии электрического поля. Будем рассматривать уравнения (8); уравнения (9) имеют ту же самую структуру. Методом исключения получим уравнения второго порядка для функций $F_1(z)$ и $F_3(z)$:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - 2\varepsilon eA + e^2A^2 + ie\frac{dA}{dz}\right)F_1 = 0\,, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - 2\varepsilon eA + e^2A^2 - ie\frac{dA}{dz}\right)F_3 = 0\,.$$

Можно утверждать, что всякое решение первого уравнения порождает решение второго (и наоборот) согласно правилу

$$F_1(z) \quad ---> \quad F_3(z) = \text{const}\,[F_1(z)]^*\,; \tag{11}$$

это позволяет ограничиться анализом решений только одного уравнения. В явном виде уравнение для F_1 выглядит так:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \varepsilon eE(e^{2z} - 1) + \frac{e^2E^2}{4}(e^{2z} - 1)^2 + ieEe^{2z} - M^2\right)F_1 = 0\,. \tag{12}$$

В областях $z \to \pm\infty$ оно упрощается:

$$z \to -\infty, \left[\frac{d^2}{dz^2} + (\varepsilon + eE/2)^2 - M^2\right]F_1 = 0, \quad z \to +\infty, \left[\frac{d^2}{dz^2} + e^{4z}e^2E^2/4\right]F_1 = 0\,; \tag{13}$$

в первом уравнении добавка $eE/2$ к энергии обусловлена отмеченным поведением потенциала: $eA_0(z \to -\infty) \to -eE/2$; во втором уравнении оставляем только главный член, пропорциональный e^{4z}. Легко находим возможные асимптотики решений в этих областях:

$$z \to -\infty, F_1 \sim \exp\left(\pm i\sqrt{(\varepsilon + eE/2)^2 - M^2}\; z\right); \quad z \to +\infty, F_1 \sim \exp\left(\pm i\frac{eE}{2}e^{2z}\right). \tag{14}$$

Специально обратим внимание на то, что, в отличие от задачи о частице Дирака в электрическом поле на фоне плоского пространства, здесь решения в областях

$z \to -\infty$ и $z \to +\infty$ описываются существенно разными дифференциальными уравнениями; это находит отражение и в поведении решений в этих областях. Различия обусловлены несимметричным поведением метрики пространства Лобачевского в этих двух областях.

Введем новую переменную $Z = e^z$, $Z \in (0, +\infty)$. Тогда уравнение (12) принимает вид

$$\left[\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{1}{Z}\frac{d}{dZ} + \left(ieE - \varepsilon eE - \frac{e^2E^2}{2}\right) + \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon eE + e^2E^2/4 - M^2}{Z^2} + \frac{e^2E^2}{4}Z^2\right]F_1 = 0.$$

Воспользуемся (временной) заменой в обозначениях: $eE/2 \Rightarrow E$; тогда последнее уравнение можно представить кратко как

$$F''_1 + \frac{1}{Z}F'_1 + \left(A + \frac{B}{Z^2} + CZ^2\right)F_1 = 0,$$

$$A = -2E(E + \varepsilon - i), \quad B = (\varepsilon + E)^2 - M^2, \quad C = E^2. \tag{15}$$

Заметим, что уравнение для функции F_3 – см. (11) – будет иметь похожий вид с единственной заменой в параметре A:

$$A = -2E(E + \varepsilon - i) \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = -2E(E + \varepsilon + i) = A^*,$$

$$F''_3 + \frac{1}{Z}F'_3 + \left(\overline{A} + \frac{B}{Z^2} + CZ^2\right)F_3 = 0, \quad F_3(Z) = \text{const}\,[F_1(Z)]^*. \tag{16}$$

Для уравнения (15) особая точка $Z = 0$ – регулярная. Исследуем особенность в $Z = \infty$. Для этого воспользуемся переменной $y = 1/Z$, получим

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{y}\frac{d}{dy} + \frac{A}{y^4} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y^6}\right)F_1 = 0; \tag{17}$$

т.е. точка $Z = \infty$ является нерегулярной и имеет ранг 3. Таким образом, имеем уравнение типа $[0, \infty_3]$.

Поскольку в уравнении есть только две симметричные особые точки 0 и ∞, то можно использовать квадратичную замену. Действительно, пусть

$$Z^2 = x, \qquad \frac{d}{dZ} = 2\sqrt{x}\frac{d}{dx}, \qquad \frac{d^2}{dZ^2} = 4x\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx};$$

уравнение (15) примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + \frac{A}{4x} + \frac{B}{4x^2} + \frac{C}{4}\right)F_1(x) = 0; \tag{18}$$

уравнение для $F_3(x)$ имеет похожий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + \frac{\overline{A}}{4x} + \frac{B}{4x^2} + \frac{C}{4}\right)F_3(x) = 0, \quad \overline{A} = A^*, \ F_3(x) = \text{const}\,[F_1(x)]^*. \tag{19}$$

Точка $x = 0$ – регулярная. Исследуем точку $x = \infty$, $z = \pm\infty$. Для этого введем замену переменных $X = x^{-1}$:

$$\left(\frac{d^2}{dX^2} + \frac{1}{X}\frac{d}{dX} + \frac{A}{4X^3} + \frac{B}{4X^2} + \frac{C}{4X^4} \right) F_1 = 0\,; \tag{20}$$

точка $x = \infty$ является нерегулярной особой точкой ранга 2. Таким образом, уравнение (18) относится к классу $[0, \infty_2]$, т.е. вырожденному гипергеометрическому типу.

Свяжем уравнение с вырожденными гипергеометрическими функциями [8] явно. Для этого применим подстановку:

$$F_1 = x^{\rho} e^{\sigma x} \varphi_1(x)\,, \quad F'_1 = x^{\rho} e^{\sigma x} \left[\varphi'_1 + \left(\frac{\rho}{x} + \sigma \right) \varphi_1 \right],$$

$$F''_1 = x^{\rho} e^{\sigma x} \left[\varphi''_1 + \left(\frac{2\rho}{x} + 2\sigma \right) \varphi'_1 + \left(\frac{\rho(\rho - 1)}{x^2} + \frac{2\rho\sigma}{x} + \sigma^2 \right) \varphi_1 \right].$$

Исходное уравнение (18) примет вид:

$$x \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \left(2\rho + 1 + 2\sigma x \right) \frac{d\varphi_1}{dx} + \left(\frac{\rho^2 + B/4}{x} + (\sigma^2 + C/4)x + \sigma(2\rho + 1) + \frac{A}{4} \right) \varphi_1 = 0\,.$$

Накладывая ограничения на параметры ρ, σ:

$$\rho = \pm i \frac{\sqrt{B}}{2} = \pm \frac{i}{2} \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}\,, \qquad \sigma = \pm i \frac{\sqrt{C}}{2} = \pm \frac{iE}{2}\,, \tag{21}$$

приходим к уравнению

$$\left(x \frac{d^2}{dx^2} + \left(2\rho + 1 + 2\sigma x \right) \frac{d}{dx} + \sigma(2\rho + 1) + \frac{A}{4} \right) \varphi_1 = 0.$$

Для определенности пусть

$$\rho = +\frac{i}{2} \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}\,, \qquad \sigma = -i \frac{|E|}{2} \quad (E = \delta\,|E|, \delta = \pm 1)\,. \tag{22}$$

Вводим новую переменную y:

$$y = -2\sigma x = i\,|E|\,e^{2z} \in (0 \cdot i, +\infty \cdot i), \qquad \frac{d}{dx} = -2\sigma \frac{d}{dy}\,; \tag{23}$$

уравнение для φ_1 принимает вид:

$$y \frac{d^2\varphi_1}{dy^2} + \left(2\rho + 1 - y \right) \frac{d\varphi_1}{dy} - \frac{4\sigma(2\rho + 1) + A}{8\sigma} \varphi_1 = 0\,. \tag{24}$$

Это уравнение вырожденного гипергеометрического типа [8]

$$y \frac{d^2 Y}{dy^2} + (c - y) \frac{dY}{y} - aY = 0 \quad (y = i\,|E|\,e^{2z})$$

с параметрами

$$c = 1 + 2\rho = 1 + i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}\ ,$$

$$a = \rho + \frac{1}{2} + \frac{A}{8\sigma} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} - \frac{i\delta}{2}(\varepsilon + E)\,. \tag{25}$$

В зависимости от направления электрического поля имеем варианты A и B:

$$(A),\ E = +|E|, \qquad c = 1 + i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$
$$a = \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} - \frac{i}{2}(\varepsilon + E)\,; \tag{26}$$

$$(B),\ E = -|E|, \qquad c = 1 + i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$
$$a' = 1 + \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} + \frac{i}{2}(\varepsilon + E)\,. \tag{27}$$

Дальше будем следить за обоими вариантами.

Заметим, что при построении решений для функции $F_3(x)$ было бы получено аналогичное уравнение. Чтобы полностью сохранить формальную симметрию относительно комплексного сопряжения, запишем его в виде

$$F_3 = x^{\bar\rho} e^{\bar\sigma x}\varphi_3(x), \quad \varphi_3(x) = [\varphi_1(x)]^*,$$
$$\bar\rho = \rho^* = -\frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}, \quad \bar\sigma = \sigma^* = +i\frac{|E|}{2}, \quad \bar y = y^* = -y\,,$$
$$\bar c = 1 + 2\bar\rho = 1 - i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}\ ,$$
$$\bar a = (\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2}) - \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} + \frac{i\delta}{2}(\varepsilon + E)\,. \tag{28}$$

В зависимости от направления электрического поля здесь также имеем варианты A и B:

$$(A),\ E = +|E|, \qquad \bar c = 1 - i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$
$$\bar a = -\frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} + \frac{i}{2}(\varepsilon + E)\,; \tag{29}$$

$$(B),\ E = -|E|, \qquad \bar c = 1 - i\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2},$$
$$\bar a' = 1 - \frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} - \frac{i}{2}(\varepsilon + E)\,. \tag{30}$$

Дальше достаточно детально следить только за функцией $F_1(y)$, решения для $F_3(y)$ можно получить с помощью формальных замен.

Теперь перейдем к описанию линейно независимых решений уравнения для функции $\varphi_1(y)$, пользуясь общими свойствами решений вырожденного гипергеометрического уравнения. Сначала рассматриваем два решения [8]:

$$Y_1(y) = \Phi(a, c; y)\,,$$
$$\varphi_1^{(1)}(y) = y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2 - M^2}/2} e^{-y/2} \times \Phi(a, c; y)\,; \tag{31}$$
$$Y_2(y) = y^{1-c}\Phi(a - c + 1, 2 - c; y),$$
$$\varphi_1^{(2)}(y) = y^{-i\sqrt{(\varepsilon+E)^2 - M^2}/2} e^{-y/2} \times \Phi(a - c + 1, 2 - c; y)\,. \tag{32}$$

Эти два решения имеют простое асимптотическое поведение в области $z \to -\infty (y \to 0)$:

$$(A) \qquad \varphi_1^{(1)} \sim y^{+i\sqrt{(\varepsilon+|E|)^2 - M^2}/2} = \left(i\,|\,E\,|\,e^{2z}\right)^{+i\sqrt{(\varepsilon+|E|)^2 - M^2}/2},$$

$$\varphi_1^{(2)} \sim y^{-i\sqrt{(\varepsilon+|E|)^2 - M^2}/2} = \left(i\,|\,E\,|\,e^{2z}\right)^{-i\sqrt{(\varepsilon+|E|)^2 - M^2}/2}, \qquad (33)$$

$$(B) \qquad \varphi_1^{(1)} \sim y^{+i\sqrt{(\varepsilon-|E|)^2 - M^2}/2} = \left(i\,|\,E\,|\,e^{2z}\right)^{+i\sqrt{(\varepsilon-|E|)^2 - M^2}/2},$$

$$\varphi_1^{(2)} \sim y^{-i\sqrt{(\varepsilon-|E|)^2 - M^2}/2} = \left(i\,|\,E\,|\,e^{2z}\right)^{-i\sqrt{(\varepsilon-|E|)^2 - M^2}/2}. \qquad (34)$$

Отмечаем, что асимптотики мало различаются в зависимости от направления поля; в обоих случаях поля они имеют вид модифицированных плоских волн, распространяющихся в разных направлениях.

Известно [8] асимптотическое представление для Y_1 в области $y \to +i\infty$:

$$Y_1(y) = \Phi(a,c;y) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-y)^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} x^{a-c} e^{y}\;; \qquad (35)$$

после умножения этого соотношения на $y^{\rho} e^{-y/2}$ получаем

$$\varphi_1^{(1)}(y) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-y)^{-a+\rho} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} x^{a-c+\rho} e^{+y/2}. \qquad (36)$$

Для вариантов (*A*) и (*B*) эта формула примет, соответственно, вид:

$$(A) \qquad \varphi_1^{(1)}(y) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-y)^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} y^{-1-i(\varepsilon+|E|)/2} e^{+y/2},$$

$$(B) \qquad \varphi_1^{(1)}(y) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a')}(-y)^{-1-i(\varepsilon-|E|)/2} e^{-y/2} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a')} y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2}\;; \qquad (37)$$

штрих означает замену $|\,E\,| \text{---}> -|\,E\,|$. В разложениях (37) нужно учесть, что

$$z \to +\infty, \quad y^{-1} = \frac{1}{iEe^{2z}} \to 0,$$

а все остальные элементы в (37) представляют осциллирующие функции. Поэтому асимптотические формулы (37) упрощаются до следующих:

$$(A) \quad \varphi_1^{(1)}(z \to +\infty) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-y)^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2}\;;$$

$$(B) \qquad \varphi_1^{(1)}(z \to +\infty) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a')} y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2}. \qquad (38)$$

Отметим, что два множителя в асимптотиках не равноценны:

$$(A) \qquad y^{+i(\varepsilon+|E|)/2} e^{-y/2} \sim e^{i(\varepsilon+|E|)z}\; e^{-ie^{2z}|E|/2} \approx \exp\left(-i\frac{|\,E\,|}{2} e^{2z}\right),$$

$$(B) \qquad y^{+i(\varepsilon-|E|)/2} e^{+y/2} \sim e^{i(\varepsilon-|E|)z}\; e^{+ie^{2z}|E|/2} \approx \exp\left(+i\frac{|\,E\,|}{2} e^{2z}\right). \qquad (39)$$

Аналогично имеем асимптотическое представление для решения Y_2:

$$Y_2(y) = y^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c; y) \sim$$
$$\sim y^{1-c}\left(\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(2-c-a+c-1)}(-y)^{-a+c-1} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}x^{a-c+1-2+c}e^{y}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y_2(y) \sim \left(\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}(-y)^{-a} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}x^{a-c}e^{y}\right); \quad (40)$$

отсюда после умножения на $y^{\rho}e^{-y/2}$ получаем

$$\varphi_1^{(2)}(y) \sim \left(\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}(-y)^{-a+\rho}e^{-y/2} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}y^{a-c+\rho}e^{+y/2}\right). \quad (41)$$

Для вариантов (A) и (B) эта формула примет вид:

$$(A) \qquad \varphi_1^{(2)} \sim \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)}(-y)^{+i(\varepsilon+|E|)/2}e^{-y/2} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)}y^{-1-i(\varepsilon+|E|)/2}e^{+y/2},$$
$$(B) \qquad \varphi_1^{(2)} \sim \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a')}(-y)^{-1-i(\varepsilon-|E|)/2}e^{-y/2} + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a'-c+1)}y^{+i(\varepsilon-|E|)/2}e^{+y/2}. \quad (42)$$

С учетом соотношений

$$z \to +\infty, \quad y^{-1} = \frac{1}{iEe^{2z}} \to 0$$

асимптотические формулы (42) упрощаются:

$$(A) \quad \varphi_1^{(2)}(z \to +\infty) \sim \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a')}(-y)^{+i(\varepsilon+|E|)/2}e^{-y/2},$$
$$(B) \quad \varphi_1^{(2)}(z \to +\infty) \sim \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a'-c+1)}y^{+i(\varepsilon-|E|)/2}e^{+y/2}. \quad (43)$$

Здесь также множители в асимптотиках не равноценны:

$$(A) \qquad y^{+i(\varepsilon+|E|)/2}e^{-y/2} \sim e^{i(\varepsilon+|E|)z}\, e^{-ie^{2z}|E|/2} \approx \exp\left\{-i\frac{|E|}{2}e^{2z}\right\},$$
$$(B) \qquad y^{+i(\varepsilon-|E|)/2}e^{+y/2} \sim e^{i(\varepsilon-|E|)z}\, e^{+ie^{2z}|E|/2} \approx \exp\left\{+i\frac{|E|}{2}e^{2z}\right\}. \quad (44)$$

Можно выбирать другую пару решений [8, с. 246]:

$$\varphi_1^{(5)}(y) = y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2-M^2}}e^{-y/2} \times Y_5(y) = y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2-M^2}}e^{-y/2} \times \Psi(a,c;y),$$
$$\varphi_1^{(7)}(y) = y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2-M^2}}e^{-y/2} \times Y_7(y) = y^{+i\sqrt{(\varepsilon+E)^2-M^2}}e^{+y/2}\Psi(c-1,c;-y). \quad (45)$$

Известны [8] линейные переразложения решений $Y_1 - Y_2$ и $Y_5 - Y_7$:

$$Y_5 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}Y_1 + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}Y_2, \quad Y_7 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)}Y_1 - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi c}Y_2. \quad (46)$$

Эти формулы после умножения на $y^{\rho}e^{-y/2}$ дают линейные соотношения между полными решениями:

$$\varphi_1^{(5)} = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\varphi_1^{(1)} + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}\varphi_1^{(2)}, \quad \varphi_1^{(7)} = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)}\varphi_1^{(1)} - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)}e^{i\pi c}\varphi_1^{(2)}. \tag{47}$$

Соотношения (47) позволяют найти поведение функций φ_5 и φ_7 в обеих особых точках. Пара решений φ_1, φ_2 интерпретируется наиболее просто: в области $z \to -\infty$ электрическое поле «исчезает», эти два решения описывают почти плоские волны, распространяющиеся в двух противоположных направлениях. В области $z \to +\infty$ это качественное различие в значительной степени сглаживается (см. также более точные асимптотики с учетом двух сомножителей). Решения φ_5, φ_7 ведут себя похожим образом с тем отличием, что в области $z \to -\infty$ они представляют суперпозиции плоских волн, распространяющихся в разных направлениях.

3. Вычисление относительного коэффициента

Поскольку по известным решениям F_1 предстоит вычислять сопутствующую функцию F_3, преобразуем уравнения первого порядка (8)

$$\left[(\varepsilon - eA) - i\frac{d}{dz}\right]F_3 - MF_1 = 0, \quad \left[(\varepsilon - eA) + i\frac{d}{dz}\right]F_1 - MF_3 = 0$$

к переменной x. С учетом тождеств $eA(z) = E(x-1)$, $(d/dz) = 2x\,(d/dx)$ получаем

$$F_1 = \frac{1}{M}\left(\varepsilon + E - Ex - 2ix\frac{d}{dx}\right)F_3, \quad F_3 = \frac{1}{M}\left((\varepsilon + E - Ex + 2ix\frac{d}{dx}\right)F_1. \tag{48}$$

Поскольку функция F_1 представлена в переменной $y = iEx$, то соотношение, задающее F_3, перепишем также в этой переменной:

$$F_3 = \frac{2i}{M}\left(-\frac{i}{2}(\varepsilon + E) + \frac{y}{2} + y\frac{d}{dy}\right)F_1, \quad F_1 = y^{\rho}e^{-y/2}F(a,c;y). \tag{49}$$

С учетом равенств

$$\rho = +\frac{i}{2}\sqrt{(\varepsilon+E)^2 - M^2}, \; c = 1 + i\sqrt{(\varepsilon+E)^2 - M^2}, \; \rho = \frac{c-1}{2}, \; a = \frac{c-1}{2} - \frac{i}{2}(\varepsilon + E)$$

уравнение связи (49) можно записать так, чтобы оставались только параметры a, c:

$$F_3 = \frac{2i}{M}\left(a - \frac{c-1}{2} + \frac{y}{2} + y\frac{d}{dy}\right)y^{(c-1)/2}e^{-y/2}F(a,c;y). \tag{50}$$

Вычислим

$$y\frac{d}{dy}y^{(c-1)/2}e^{-y/2}F(a,c;y) =$$

$$= \frac{c-1}{2}y^{(c-1)/2}e^{-y/2}F(a,c;y) - \frac{1}{2}y^{(c-1)/2+1}e^{-y/2}F(a,c;y) + y^{(c-1)/2}e^{-y/2}\; y\frac{d}{dy}F(a,c;y);$$

дальше получаем:

$$F_3 = \frac{2i}{M} e^{-y/2} \times$$
$$\times \{ a y^{(c-1)/2} F(a,c;y) - \frac{c-1}{2} y^{(c-1)/2} F(a,c;y) + \frac{1}{2} y^{(c-1)/2+1} F(a,c;y) +$$
$$+ \frac{c-1}{2} y^{(c-1)/2} F(a,c;y) - \frac{1}{2} y^{(c-1)/2+1} F(a,c;y) + y^{(c-1)/2} \; y \frac{d}{dy} F(a,c;y) \} .$$

Отсюда после упрощения находим

$$F_3 = \frac{2i}{M} e^{-y/2} y^{(c-1)/2} \left[aF(a,c;y) + y \frac{d}{dy} F(a,c;y) \right]. \tag{51}$$

Дальше учтем известное соотношение [8]

$$y \frac{d}{dy} F(a,c;y) = a \, [\, F(a+1,c;y) - F(a,c;y) \,] \, ;$$

в результате приходим к равенству:

$$F_3 = \frac{2i}{M} e^{-y/2} y^{(c-1)/2} \; aF(a+1,c;y) \, .$$

Отсюда, принимая во внимание тождество [8]

$$F(a+1,c;y) = e^{y} F(c-a-1,c;-y) \, ,$$

приходим к нужному выражению для функции $F_3(y)$:

$$F_3 = \frac{2i}{M} a \left\{ e^{+y/2} y^{(c-1)/2} \; F(c-a-1,c;-y) \right\}. \tag{52}$$

С учетом равенства

$$a = -\frac{i}{2} \left((\varepsilon + E) - \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2} \right)$$

формулу связи (52) записываем в виде:

$$F_3 = \frac{(\varepsilon + E) - \sqrt{(\varepsilon + E)^2 - M^2}}{M} F_1^* \, . \tag{53}$$

Это можно записать короче с использованием специальной параметризации:

$$\cosh \gamma = \frac{\varepsilon + M}{M} \, |, \quad F_3 = (\cosh \gamma - \sinh \gamma) F_1^* = e^{-\gamma} F_1^* \, . \tag{54}$$

4. Анализ вещественных дифференциальных уравнений

Заметим, что свойство (11) позволяет комбинированием уравнений (8) вывести два уравнения первого порядка для двух вещественных функций $F_1 + F_3 = g$, $i(F_1 - F_3) = h$; эти уравнения выглядят так:

$$(\varepsilon - eA - M)g + \frac{dh}{dz} = 0, \qquad (\varepsilon - eA + M)h - \frac{dg}{dz} = 0\,. \tag{55}$$

Переходим к переменной $x = e^{2z}$:

$$A(z) = \frac{E}{2}(e^{2z} - 1) = \frac{E}{2}(x-1), \quad \frac{d}{dz} = 2x\frac{d}{dx}\,;$$

так получаем систему

$$\left[\varepsilon - \frac{eE}{2}(x-1) - M\right]g + 2x\frac{dh}{dx} = 0\,, \quad \left[\varepsilon - \frac{eE}{2}(x-1) + M\right]h - 2x\frac{dg}{dx} = 0\,. \tag{56}$$

Временно для краткости сменим обозначение $eE/2 --> E$; тогда

$$(\varepsilon + E - M - Ex)g + 2x\frac{dh}{dx} = 0\,, \quad (\varepsilon + E + M - Ex)h - 2x\frac{dg}{dx} = 0\,. \tag{57}$$

Отсюда получаем, например, явный вид вещественного уравнения 2-го порядка для H:

$$\frac{d^2}{dx^2}h + \left(\frac{1}{x} - \frac{E}{-\varepsilon - E + M + Ex}\right)\frac{d}{dx}h + \left(\frac{1}{4}E^2 - \frac{1}{2}\frac{E\left(E+\varepsilon\right)}{x} + \frac{1}{4}\frac{\left(E+\varepsilon\right)^2 - M^2}{x^2}\right)h = 0\,;$$

его можно записать короче:

$$x_0 = \frac{\varepsilon + E - M}{E}\,, \quad \frac{d^2}{dx^2}h + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - x_0}\right)\frac{d}{dx}h +$$
$$+\left(\frac{1}{4}E^2 - \frac{1}{2}\frac{E\left(E+\varepsilon\right)}{x} + \frac{1}{4}\frac{\left(E+\varepsilon\right)^2 - M^2}{x^2}\right)h = 0$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2}h + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - x_0}\right)\frac{d}{dx}h + \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}\right)h = 0\,. \tag{58}$$

Особые точки 0, x_0 – регулярные; точка $x = \infty$ – нерегулярная ранга 2. Таким образом, здесь имеем уравнение из класса конфлюэнтного уравнения Гойна [9]. Линейным преобразованием аргумента особую точку можно переместить из x_0 в 1:

$$\frac{x}{x_0} \Rightarrow x = \frac{E}{\varepsilon + E - M}e^{2z}\,, \quad c'_0 = x_0^2 c_0, \quad c'_1 = x_0 c_1\,, \quad c'_2 = c_2\,; \tag{59}$$

тем самым преобразуя уравнение (58) к виду (ниже штрихи для краткости будем опускать):

$$\frac{d^2}{dx^2}h + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right)\frac{d}{dx}h + \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2}\right)h = 0\,. \tag{60}$$

В окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ решения ведут себя так:

$$x \to 0, \quad h(x) = x^a, \quad a = \pm i\sqrt{c_2}\,; \qquad x \to 1, \quad h(x) = (x-1)^b, \quad b = 0,\ 2\,. \tag{61}$$

Чтобы установить возможное поведение решений на бесконечности, делаем замену переменных x=1/X:

$$\frac{d^2h}{dX^2}+\left(\frac{2}{X}+\frac{1}{X-1}\right)\frac{dh}{dX}+\left(\frac{c_0}{X^4}+\frac{c_1}{X^3}+\frac{c_2}{X^2}\right)h=0\,. \qquad (62)$$

Около $X=0$ решения строятся на основе подстановки

$$h(X)=X^{\rho}\;e^{\sigma/X}=x^{-\rho}\;e^{\sigma x}\,.$$

Вещественные уравнения имеют то преимущество, что они позволяют лучше понять сущность физической задачи в терминах потенциалов.

Локальные решения Фробениуса [9] уравнения (60) в окрестности точки $x=0$ строятся на основе подстановки:

$$h(x)=x^a f(x), \qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n\,.$$

Ищем решения уравнения (60) в виде $h(x)=x^a f(x)$. Находим первую и вторую производные:

$$h'=ax^{a-1}f+x^a f', \qquad h''=a(a-1)x^{a-2}f+2ax^{a-1}f'+x^a f''\,;$$

дальше получаем уравнение

$$f''+\left(\frac{2a+1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)f'+\left(c_0+\frac{a^2+c_2}{x^2}+\frac{c_1-a}{x}+\frac{a}{x-1}\right)f=0\,.$$

Накладываем ограничения

$$a^2+c_2=0, \quad a=\pm i\sqrt{c_2}=\pm\frac{i}{2}\sqrt{\varepsilon+E)^2-M^2}\,.$$

Домножим получаемое уравнение на $x(x-1)$:

$$x^2 f''-xf''+[2ax-(2a+1)]f'+\left(x^2c_0+(c_1-c_0)x+(a-c_1)\right)f=0$$

или

$$x^2 f''-xf''+(N_1x+N)f'+(L_2x^2+L_1x+L)f=0\,. \qquad (63)$$

Строим решения в виде степенных рядов:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \qquad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nd_n x^{n-1}, \qquad f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)d_n x^{n-2}\,;$$

получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)d_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kd_{k+1}x^k+N_1\sum_{k=1}^{\infty}kd_k x^k+N\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)d_{k+1}x^k+$$
$$+L_2\sum_{k=2}^{\infty}d_{k-2}x^k+L_1\sum_{k=1}^{\infty}d_{k-1}x^k+L\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^k=0\,.$$

В результате приходим к рекуррентным соотношениям для коэффициентов ряда:

$$k=0,\quad Nd_1+Ld_0=0\,,$$
$$k=1,\quad -2d_2+L_1d_0+Ld_1=0\,,$$
$$k=2,3,...$$
$$k(k-1)d_k-k(k+1)d_{k+1}+N_1kd_k+N(k+1)d_{k+1}+L_2d_{k-2}+L_1d_{k-1}+Ld_k=0\,.$$

Таким образом, основное рекуррентное соотношение имеет вид:

$$L_2d_{k-2}+L_1d_{k-1}+[L+k(k-1)+N_1k]d_k+[-k(k+1)+N(k+1)]d_{k+1}=0\,. \tag{64}$$

Исследуем сходимость ряда по методу Пуанкаре – Перрона [9]:

$$L_2+L_1\frac{d_{k-1}}{d_{k-2}}+[L+k(k-1)+N_1k]\frac{d_k}{d_{k-1}}\frac{d_{k-1}}{d_{k-2}}+[-k(k+1)+N(k+1)]\frac{d_{k+1}}{d_k}\frac{d_k}{d_{k-1}}\frac{d_{k-1}}{d_{k-2}}=0\,.$$

Делим уравнение на k^2, устремляем $k\to\infty$, вводим параметр

$$r=\lim_{k\to\infty}\frac{d_{k-1}}{d_{k-2}}=r,\qquad R_{conv}=\frac{1}{|r|}\,;$$

получаем алгебраическое уравнение для величины r: $r^2-r^3=0\quad\Rightarrow\quad r=1,\ r=0$. Следовательно, минимальный радиус сходимости ряда равен $R_{conv}^{min}=1$.

Обратимся к уравнению (62). Используем подстановку

$$h(X)=X^{\rho}\,e^{\sigma/X}g(X)\,,\quad g(X)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nX^n\,, \tag{65}$$

$$h'=X^{\rho}e^{\sigma/X}\left(\frac{\rho}{X}g-\frac{\sigma}{X^2}g+g'\right),$$

$$h''=X^{\rho}e^{\sigma/X}\left[\left(\frac{\rho(\rho-1)}{X^2}+\frac{2\sigma-2\rho\sigma}{X^3}+\frac{\sigma^2}{X^4}\right)g+\left(\frac{2\rho}{X}-\frac{2\sigma}{X^2}\right)g'+g''\right].$$

Для функции $g(X)$ получим уравнение

$$g''+\left(\frac{2\rho+2}{X}-\frac{2\sigma}{X^2}+\frac{1}{X-1}\right)g'+$$
$$+\left(\frac{\sigma^2+c_0}{X^4}+\frac{-2\rho\sigma+c_1}{X^3}+\frac{\rho(\rho+1)+\sigma+c_2}{X^2}+\frac{\sigma-\rho}{X}+\frac{\rho-\sigma}{X-1}\right)g=0.$$

Накладываем ограничения

$$\sigma^2+c_0=0\quad\Rightarrow\quad\sigma=\pm i\sqrt{c_0}\,,$$
$$-2\rho\sigma+c_1=0\quad\Rightarrow\quad\rho=\frac{c_1}{2\sigma}=\pm\frac{c_1}{2i\sqrt{c_0}}\,. \tag{66}$$

Уравнение упростится

$$g''+\left(\frac{2\rho+2}{X}-\frac{2\sigma}{X^2}+\frac{1}{X-1}\right)g'+\left(\frac{\rho(\rho+1)+\sigma+c_2}{X^2}+\frac{\sigma-\rho}{X}+\frac{\rho-\sigma}{X-1}\right)g=0.$$

Удобно использовать сокращенную запись:

$$N_1=2\rho+2\,,\quad N_2=-2\sigma\,,\quad N_3=1\,,$$

$$M_2 = \rho(\rho+1)+\sigma+c_2\,, \quad M_1=\sigma-\rho\,, \quad M_3=\rho-\sigma\,;$$
$$g''+(\frac{N_1}{X}+\frac{N_2}{X^2}+\frac{N_3}{X-1})g'+(\frac{M_1}{X}+\frac{M_2}{X^2}+\frac{M_3}{X-1})g=0\,. \qquad (67)$$

Домножив последнее уравнение на $X^2(X-1)$:

$$X^3g''-X^2g''+\left[(N_1+N_3)X^2+N_2X+(-N_1-N_2)\right]g'+$$
$$+\left[(M_1+M_3)X^2+(-M_1+M_2)X-M_2\right]g=0,$$

будем строить решения уравнения в виде степенного ряда:

$$g(X)=\sum_{n=0}^{\infty}d_nX^n\,, \quad g'(X)=\sum_{n=1}^{\infty}nd_nX^{n-1}\,, \quad g''(X)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nX^{n-2}\,;$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nX^{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nX^n+$$
$$+(N_1+N_2)\sum_{n=1}^{\infty}nd_nX^{n+1}+N_2\sum_{n=1}^{\infty}nd_nx^n-(N_1+N_2)\sum_{n=1}^{\infty}nd_nX^{n-1}+$$
$$+(M_1+M_3)\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{n+2}+(-M_1+M_2)\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^{n+1}-M_2\sum_{n=0}^{\infty}d_nx^n=0\,.$$

После изменения индексов суммирования получим:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)d_{n-1}X^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_nX^n+$$
$$+(N_1+N_2)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)d_{n-1}X^n+N_2\sum_{n=1}^{\infty}nd_nX^n-$$
$$-(N_1+N_2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}X^n+$$
$$+(M_1+M_3)\sum_{n=2}^{\infty}d_{n-2}X^n+(-M_1+M_2)\sum_{n=1}^{\infty}d_{n-1}X^n-M_2\sum_{n=0}^{\infty}d_nX^n=0\,.$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при всех степенях X^n:

$$n=0, \qquad -(N_1+N_2)d_1-M_2d_0=0;$$
$$n=1, \qquad N_2d_1-(N_1+N_2)2d_2+(-M_1+M_2)d_0-M_2d_1=0;$$
$$n=2, \qquad -2d_2+(N_1+N_2)d_1+N_2 2d_2-$$
$$-(N_1+N_2)3d_3+(M_1+M_3)d_0+(-M_1+M_2)d_1-M_2d_2=0;$$
$$n=3, \qquad 2d_2-6d_3+(N_1+N_2)2d_2+N_2 3d_3-$$
$$-(N_1+N_2)4d_4+(M_1+M_3)d_1+(-M_1+M_2)d_2-M_2d_3=0;$$
$$n=4,5,6,\ldots \qquad (n-1)(n-2)d_{n-1}-n(n-1)d_n+(N_1+N_2)(n-1)d_{n-1}+N_2nd_n-$$
$$-(N_1+N_2)(n+1)d_{n+1}+(M_1+M_3)d_{n-2}+(-M_1+M_2)d_{n-1}-M_2d_n=0\,.$$

Таким образом, приходим к 4-членным рекуррентным соотношениям:

$$(M_1+M_3)d_{n-2}+\left[(n-1)(n-2)+(N_1+N_2)(n-1)+(-M_1+M_2)\right]d_{n-1}+$$
$$+\left[-n(n-1)+N_2n-M_2\right]d_n-(N_1+N_2)(n+1)d_{n+1}=0.$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применим метод Пуанкаре – Перрона:

$$(M_1+M_3)+\left[(n-1)(n-2)+(N_1+N_2)(n-1)+(-M_1+M_2)\right]\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}+$$

$$+(-n(n-1)+N_2n-M_2)\frac{d_n}{d_{n-1}}\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}-(N_1+N_2)(n+1)\frac{d_{n+1}}{d_n}\frac{d_n}{d_{n-1}}\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}=0\,.$$

Делим уравнение на n^2, устремляем $n\to\infty$, вводим параметр

$$r=\lim_{k\to\infty}\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}=r\,,\quad R_{conv}=\frac{1}{|r|}\,;$$

получаем алгебраическое уравнение для величины r: $r-r^2=0\quad\Rightarrow\quad r=0,\ r=1$; следовательно, минимальный радиус сходимости ряда равен 1. Эта область соответствует плоскости в переменной x с вырезанным кругом радиуса 1.

Поскольку на окружности радиуса 1 поведение решений вполне регулярное – см. (61), – можно ожидать, что построенные ряды (и по переменной x, и по переменной $ZX=x^{-1}$) будут сходиться в более широких областях, плавно проходя через границу круга радиуса 1.

В уравнении (60) можно убрать преобразованием член с первой производной:

$$h=\varphi F,\qquad F''+F'\left(2\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)+\left[\frac{\varphi''}{\varphi}+\frac{\varphi'}{\varphi}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)+c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}\right]F=0\,.$$

Фиксируя функцию φ:

$$\left(2\frac{\varphi'}{\varphi}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)=0\quad\Rightarrow\qquad\varphi=\sqrt{\frac{x-1}{x}}\,,$$

приходим к уравнению со структурой

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+P^2(x)\right)F=0\,,$$

где эффективный квадрат импульса равен

$$P^2(x)=c_0+\frac{c_1-1/2}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{c_2+1/4}{x^2}-\frac{3}{4}\frac{1}{(x-1)^2}\,.\qquad(68)$$

Около особых точек $x=0, x=\infty, x=1$ функция $P^2(x)$ ведет себя так:

$$x\to 0,\ P^2\sim\frac{c_2+1/4}{x^2};\quad x\to\infty,\ P^2\sim c_0;\quad x\to 1,\ P^2\sim-\frac{3}{4}\frac{1}{(x-1)^2}=-\infty.$$

Заключение

Физическая задача описывается системой из двух связанных уравнений первого порядка, которые методом исключения приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с комплекснозначными потенциалами. Построены и исследованы возможные решения этого уравнения в терминах вырожденных гипергеометрических функций. Показано, что комбинированием исходных уравнений первого порядка можно привести задачу к уравнениям второго порядка с вещественными потенциалами с двумя регулярными особыми точками и одной нерегулярной особенностью на бесконечности ранга 2, т.е. к конфлюэнтному уравнению Гойна. Получены решения Фробениуса для этих уравнений, анализ сходимости возникающих степенных рядов указывает на их определенность и корректность во всей физической области переменной $z \in (-\infty, +\infty)$.

Авторы благодарят участников семинара лаборатории теоретической физики ИФ НАН Беларуси за обсуждение работы и полезные советы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсиюк, Е. М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 99–105.
2. Овсиюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 30–36.
3. Овсиюк, Е. М. Решения типа плоских волн для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 4. – С. 80–83.
4. Ovsiyuk, E. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry / E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // NPCS. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 331–344.
5. Овсиюк, Е. М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином 1/2 / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 76–85.
6. Овсиюк Е. М. О решении уравнения Шредингера для частицы в электрическом поле в пространствах постоянной кривизны / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 3. – С. 43–47.
7. Ovsiyuk, E. M. On behavior of quantum particles in an electric field in spaces of constant curvature, hyperbolic and spherical models / E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko // Ukr. J. Phys. – 2013. – Vol. 58, № 11. – P. 1065–1072.
8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М. : Наука. 1973. – Т. 1 : Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 298 с.
9. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – New York : Oxford University Press, 2000.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.02.2017

Veko O.V., Voynova Ya.A., Ovsiyuk E.M., Red'kov V.M. **Dirac Particle in External Electric Field of the Background of Lobachevsky Geometry**

For a free Dirac particle in quasi-Cartesian coordinates (x, y, z) *of the Lobachevsky space, there exists special states when projections of the quasi-momentum along axes* x *and* y *equal to zero; the effective reflecting barrier* $U(z)$ *arising from Lobachevsky geometrical background vanishes for these states. In the present paper, this special case is investigated in presence of generalized uniform electric field. Geometry substantially influences the effects of electric field, mainly for large scale distances. The physical problem is described by two related first order equations, which lead to 2-nd order equations with complex-valued potentials; its solutions are constructed in terms of confluent hypergeometric functions. It is shown that by combining initial first order equations, one can derive second order equations with real-valued potentials: they both have two regular singular points and one irregular one of the rank 2 at infinity; they are recognized as confluent Heun equations. Its Frobenius solutions are constructed; analysis of convergence of arising series indicates that these solutions are correct in the whole physical region of the variable,* $z \in (-\infty, +\infty)$.