УДК 517.95

А.И. Басик[1], А.А. Шарманов[2]

[1]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,*
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]*магистр физ.-мат. наук, учитель математики*
гимназии № 3 имени В.З. Коржа г. Пинска

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В $\mathbf{R}^4$

В статье доказывается невыполненность условия регуляризуемости Я.Б. Лопатинского произвольной внутренней краевой задачи для одной эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка с четырьмя переменными. При этом в случае задачи Дирихле для рассматриваемой системы устанавливается, что нарушение условия регуляризуемости вызвано бесконечномерностью пространства решений однородной задачи.

Введение

Краевая задача для эллиптической системы в классической постановке заключается в том, что требуется найти решение системы в области по заданным на границе линейным комбинациям неизвестных функций и их производных. Случай существования и единственность решения задачи при любых правых частях оказывается достаточно редким, поэтому обычно рассматривается вопрос о разрешимости задачи с точностью до конечномерных пространств, т.е. вопрос о существовании решения, зависящего от конечного числа произвольных постоянных при наложении конечного числа условий на правые части. Известно [1], что свойство разрешимости краевой задачи с точностью до конечномерных пространств эквивалентно ее регуляризуемости – возможности сведения задачи к интегральному уравнению второго рода.

Для эллиптических систем в отличие от задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа возможны качественно другие картины разрешимости краевых задач. В частности, еще в 1948 г. А. В. Бицадзе обнаружил эллиптическую систему, для которой однородная задача Дирихле имеет бесконечно много линейно независимых решений [2]. Позднее для этой системы А.Т. Уссом была найдена регуляризуемая постановка краевой задачи [3].

В 1963 г. М.З. Соломяк доказал, что для известной эллиптической системы Фьютера вообще нет регуляризуемых краевых задач в классической постановке [4]. Поэтому для каждого класса систем возникает естественный вопрос о существовании регуляризуемых краевых задач.

В настоящей работе изучается возможность постановки регуляризуемых краевых условий для одной эллиптической системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка с четырьмя переменными.

Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ – ограниченная односвязная область, границей которой является достаточно гладкая трехмерная поверхность $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу отыскания решения $U(x) = (u_1(x), \ldots, u_4(x))^T$ эллиптической системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$\sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$\left(\sum_{k=0}^{s_1} B_{1k} \frac{\partial^k U}{\partial \nu^k}; \sum_{k=0}^{s_2} B_{2k} \frac{\partial^k U}{\partial \nu^k} \right) = g(y) \qquad (y \in \partial\Omega). \tag{2}$$

Здесь $A_1 = E$ – единичная матрица четвертого порядка,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$f : \Omega \to \mathbf{R}^4$ – заданная в области Ω четырехкомпонентная вектор-функция, $g : \partial\Omega \to \mathbf{R}^2$ – заданная на границе $\partial\Omega$ области Ω двухкомпонентная вектор-функция, $s_1, s_2 \in Z_+$, $B_{jk}\,(j = 1,2;\, k = 0,1,\ldots,s_j)$ – псевдодифференциальные 1×4 -матричные операторы (т.е. строки из скалярных псевдодифференциальных операторов) на $\partial\Omega$ порядка $s_j - k$, $\partial/\partial\nu$ – оператор дифференцирования по нормали к $\partial\Omega$. Отметим, что матричные коэффициенты системы (1) удовлетворяют соотношениям

$$A_j A_k^{-1} + A_k A_j^{-1} = 2E\delta_{jk} \quad (j,k = 1,\ldots,4),$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Согласно результатам работы [5], последнее означает, что однородная система (1) является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, т.е. каждая компонента $u_k(x)$ $(k = \overline{1,4})$ произвольного непрерывно дифференцируемого решения $U(x) = (u_1(x), \ldots, u_4(x))^T$ этой системы удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbf{R}^4$.

О задаче Дирихле для системы (1)

Под задачей Дирихле в классической постановке понимается задача отыскания гармонической в односвязной области функции, совпадающей на границе области с заданной функцией. Известно, что в случае непрерывности по Гельдеру граничного значения гармоническая функция находится однозначно, т.е. задача Дирихле имеет притом единственное решение.

Для голоморфных функций, в отличие от гармонических, подобный факт места не имеет. Голоморфная функция восстанавливается с точностью до постоянной при задании на границе либо действительной, либо мнимой ее части. Это объясняется тем, что по граничным значениям, например действительной части, однозначно находится действительная часть голоморфной функции, по которой, в силу условий Коши – Римана, с точностью до аддитивной постоянной восстанавливается ее мнимая часть.

Высказанные соображения заставляют считать задачей Дирихле (первой краевой задачей) задачу нахождения голоморфной функции в области по задаваемой на границе области половине всех действительных компонент искомой функции.

Рассматриваемая нами система (1) является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана и четырехкомпонентное решение ее является аналогом классической голоморфной функции. Естественно поэтому под задачей Дирихле для системы (1) понимать задачу отыскания в области четырехкомпонентного решения (1) по заданным на границе половине всех ее искомых компонент.

В этом разделе докажем бесконечномерность пространства решений однородной системы (1), удовлетворяющих однородным граничным условиям Дирихле

$$u_1\big|_{\partial\Omega}=0,\quad u_3\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{3}$$

Так как система (1) является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, то каждая компонента непрерывно дифференцируемого решения является гармонической функцией в области Ω. Поскольку существует единственная гармоническая в области Ω функция, принимающая заданное граничное значение, то $u_1\equiv 0$ и $u_3\equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Тогда функции u_2 и u_4 удовлетворяют в Ω системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x_4}=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial u_4}{\partial x_2}=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_4}{\partial x_4}=0,\\ \dfrac{\partial u_4}{\partial x_1}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}=0.\end{cases} \tag{4}$$

Будем искать решение системы (4) в виде $u_2=u_2(x_3,x_4)$, $u_4=u_4(x_3,x_4)$. Тогда (4) примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_4}{\partial x_3}-\dfrac{\partial u_2}{\partial x_4}=0,\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial u_4}{\partial x_4}=0.\end{cases} \tag{5}$$

Если $f(x_3+ix_4)$ – произвольная голоморфная функция, то функции

$$u_2=\operatorname{Im} f(x_3+ix_4),\ u_4=\operatorname{Re} f(x_3+ix_4)$$

удовлетворяют системе (5). В частности, при каждом натуральном k, вектор-функция

$$U_k(x)=\left(0,\operatorname{Im}(x_3+ix_4)^k,0,\operatorname{Re}(x_3+ix_4)^k\right)^T$$

является решением однородной задачи Дирихле (1), (3).

Таким образом, однородная задача Дирихле (1), (3) имеет бесконечно много линейно независимых решений в произвольной области $\Omega\subset\mathbf{R}^4$, т.е. задача Дирихле для системы (1) не является регуляризуемой.

Нерегуляризуемость краевых условий для системы (1)

Я.Б. Лопатинским было доказано утверждение о том, что регуляризуемость задачи эквивалентна выполнению некоторых алгебраических соотношений, связывающих ко-эффициенты эллиптической системы с коэффициентами, задающими краевые условия [1].

Для краевой задачи (1), (2) условие Я.Б. Лопатинского состоит в том, что в каждой точке $y\in\partial\Omega$ и при каждом единичном векторе τ касательном к $\partial\Omega$ в точке y ранг матрицы

$$\int_\gamma \sigma(B)(y;\lambda\nu+\tau)\cdot A^{-1}(\lambda\nu+\tau)d\lambda$$

равен 2. Здесь $A(\xi)=\sum_{j=1}^{4}A_j\xi_j$ – характеристическая матрица системы (1), $\sigma(B)$ – символ старшей части граничного оператора B, ν и τ – соответственно вектор внутренней нормали и касательный вектор к поверхности $\partial\Omega$ в точке $y \in \partial\Omega$, γ – контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий все находящиеся там λ-корни уравнения $\det A(\lambda\nu + \tau) = 0$.

Теорема 1. *Для произвольного граничного оператора* (2) *краевая задача* (1), (2) *не является регуляризуемой.*

Доказательство. Достаточно установить невыполненность условия Лопатинского для краевой задачи в полупространстве

$$\mathbf{R}^4_+ := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_4 > 0\},$$

получаемом из задачи (1), (2) «замораживанием коэффициентов» в той точке многообразия $\partial\Omega$, в которой нормаль к $\partial\Omega$ параллельна вектору (0, 0, 0, 1). Поэтому при доказательстве теоремы можно считать, что $\Omega = \mathbf{R}^4_+$ и символ главной части граничного оператора (2) не зависит от точки $y \in \partial\Omega$. Далее, поскольку система (1) позволяет выразить $\dfrac{\partial U}{\partial x_4}$ через частные производные от U по другим переменным, без ограничения общности можно предполагать, что граничные условия (2) не содержат дифференцирования по x_4. Пусть $B(\tau)$ – символ главной части граничного оператора (2). Тогда для доказательства теоремы нам остается доказать, что существует ненулевой набор $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, при котором ранг матрицы

$$(\pi)^{-1} B(\tau) \cdot \int_\gamma A^{-1}(\lambda\nu + \tau) d\lambda \tag{6}$$

строго меньше двух (здесь γ – простой гладкий замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий точку $\lambda = i$).

Матрица $B(\tau)$ представляет собой 2×4-матрицу, элементами которой являются действительнозначные непрерывные однородные функции переменных τ_1, τ_2, τ_3. Будем предполагать, что ее ранг равен двум при каждом $\tau \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, поскольку в противном случае ранг матрицы (6) заведомо меньше двух хотя бы при одном $\tau \neq 0$. Обозначим через Λ_{jk} и H_{jk} (*j, k* = 1, 2, 3, 4) миноры второго порядка, составленные из *j*-ых и *k*-ых столбцов соответственно матрицы $B(\tau)$ и матрицы (4), и положим:

$$L_1 = -\Lambda_{12} + \Lambda_{34}; \quad L_2 = \Lambda_{14} - \Lambda_{23}; \quad L_3 = \Lambda_{13} - \Lambda_{14} - \Lambda_{23} + 2\Lambda_{24}.$$

Тогда непосредственным вычислением миноров $H_{jk}\ (1 \le j < k \le 4)$ матрицы (6) получим, что в каждой точке $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ единичной сферы

$$S^2 = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathrm{R}^3 \mid \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \right\}$$

выполняются равенства:

$$H_{12} = -\tau_2(\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1) - \tau_3(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + i(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2),$$

$$H_{13} = 2(\tau_1(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + \tau_2(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) + i(\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1)),$$

$$H_{14} = \tau_1(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + \tau_2(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) + \tau_1(\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1) - \tau_3(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) +$$
$$+ i(-(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + (\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1)),$$

$$H_{23} = \tau_1(\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + \tau_2(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) - \tau_1(\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1) + \tau_3(\tau_2 L_3 - \tau_3 L_2) +$$
$$+ i((\tau_1 L_3 - \tau_3 L_1) + (\tau_1 L_2 - \tau_2 L_1)),$$

$$H_{12} = -H_{34}, \quad H_{13} = 2H_{24}.$$

Согласно теореме «о еже» [6, с. 584] на сфере S^2 найдется точка $\tau \in S^2$, в которой поле L либо вырождается, либо направлено по нормали к S^2. В первом случае все компоненты поля $L(\tau)$ нулевые, во втором – пропорциональны соответствующим компонентам вектора нормали $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ к сфере S^2, т.е.

$$\frac{\tau_1}{L_1(\tau)} = \frac{\tau_2}{L_2(\tau)} = \frac{\tau_3}{L_3(\tau)}.$$

Таким образом, в этой точке сферы S^2 все миноры второго порядка матрицы (6) обращаются в нуль, т.е. в этой точке её ранг строго меньше двух. Теорема доказана.

Заключение

Из теоремы 1 следует, что оператор, отвечающий краевой задаче (1), (2) и действующий в определенных банаховых пространствах [7; 8], не является нётеровым. Это означает, что указанный оператор имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро. Например, в случае задачи Дирихле для рассматриваемой системы установлено, что нарушение условия регуляризуемости вызвано бесконечномерностью пространства решений однородной задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лопатинский, Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.

2. Бицадзе, А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными / А. В. Бицадзе // УМН. – 1948. – Т. 3, вып. 6. – С. 211–212.

3. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация простейших краевых задач для эллиптических систем двух уравнений второго порядка на плоскости / А. Т. Усс // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 4. – С. 296–298.

4. Соломяк, М. З. О линейных эллиптических системах первого порядка / М. З. Соломяк // Докл. АН СССР. 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.

5. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.

6. Александров, П. С. Комбинаторная топология / П. С. Александров. – М. – Л. : ГОСТЕХИЗДАТ, 1947. – 660 с.

7. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

8. Волевич, Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Мат. сб. – 1965. – Т. 68, № 3. – С. 373–416.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.10.2015

Basik A.I., Sharmanau A.A. **About Boundary-Value Problems for One Elliptic System of Partial Differential Equations of the First Order in R^4**

It is proves that a regularizable boundary-value problems for one elliptic system of four partial differential equations of the first order in R^4 does not exist. In addition it is shown, that the operator corresponding to Dirichlet's problem for this system has an infinite-dimensional kernel.