УДК 517+518.948

В.М. Мадорский
канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА ХОРД И СТЕФФЕНСЕНА

Рассматриваются ряд квазиньютоновских полулокалых методов решений нелинейных операторных уравнений с помощью нерегуляризованных и частично регуляризованных методов хорд и Стефенсона. Доказывается сверхлинейная сходимость рассматриваемых итерационных процессов с «плохого» начального приближения.

Рассматривается нелинейное уравнение:

$$f(x)=0,\ f\in(D\subset X\to X),\ X-B\text{-пространство.} \tag{1}$$

Для решения нелинейного уравнения (1) А.С. Сергеевым [1] был предложен операторный вариант метода хорд, локально сходящийся со сверхлинейной скоростью.

Итерационная процедура имела следующий вид:

$$x_{n+1}=x_n-[f(x_n,x_{n-1})]^{-1}f(x_n)=x_n-\Delta x_n,\ n=1,2,... \tag{2}$$

Достоинство метода (2) состоит в том, что метод применим в том случае, если оператор f лишь непрерывен в области D и первые и вторые разделенные разности оператора f равномерно ограничены в D. К числу важных недостатков метода (2) является необходимость иметь в своем распоряжении достаточно хорошие начальные приближения x_0 и x_1, а также знание оценок ряда глобальных констант, нахождение которых часто представляет задачу, сравнимую по трудности с решением задачи (1).

Положим, что в интересующей нас области $D\subset X$ для каждого x_1,x_2,x_3 выполняется условие:

$$\|f(x_1,x_2)-f(x_2,x_3)\|\le L\|x_1-x_3\|. \tag{3}$$

Рассматривается итерационный процесс (2).

Относительно сходимости процесса (2) справедлива

Теорема 1. Пусть в области D выполняются условие (3) и элементы x_0, x_1 таковы, что

$$BL\|f(x_1)\|(1+B)=l<\frac{q}{3},\ \|x_1-x_0\|\le\|f(x_1)\|,\ q\in(0;1),\ \|[f(x_0,x_1)]^{-1}\|\le B \tag{4}$$

и справедливо соотношение $\|f(x_1)\|\left(1+B\dfrac{1-l}{1-2l}\right)\le\dfrac{q-Bl\|f(x_1)\|}{2Bl}$.

Тогда итерационный процесс (1.2) с квадратичной скоростью сходится к единственному в $\Omega_\delta=\left(x_1,\dfrac{q-BL\|f(x_1)\|}{2BL}\right)$ решению x^* уравнения (1).

Доказательство.

Выведем вначале некоторые соотношения:

$$\|E-[f(x_0,x_1)]^{-1}f(x_1,x_2)\|\le\|[f(x_0,x_1)]^{-1}\|\|f(x_0,x_1)-f(x_1,x_2)\|\le BL\|x_2-x_0\|\le$$

$$\le BL(\|x_2-x_1\|+\|x_1-x_0\|)\le BL\|f(x_1)\|(1+B)=l. \tag{5}$$

Пусть $l<1$. Так как $l<1$, то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору $[f(x_0,x_1)]^{-1} f(x_1,x_2)$ и $\left\| \left[[f(x_0,x_1)]^{-1} f(x_1,x_2) \right]^{-1} \right\| \le (1-l)^{-1}$. Далее, имеем соотношение $\left\| [f(x_1,x_2)]^{-1} \right\| \le \dfrac{\left\| [f(x_0,x_1)]^{-1} \right\|}{1-l}$. Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и условия теоремы, получаем оценку

$$\|f(x_2)\| = \|f(x_1 - \Delta x_1)\| \le \|f(x_1) - f(x_1,x_0)\Delta x_1\| + L\|x_2 - x_1\|\|x_2 - x_0\| \le$$

$$\le \left\| f(x_1) - f(x_1,x_0)[f(x_1,x_0)]^{-1} f(x_1) \right\| + \tag{6}$$

$$+L\left\| [f(x_1,x_0)]^{-1} f(x_1) \right\| (\|x_2 - x_1\| + \|x_2 - x_0\|) \le LB\|f(x_1)\|^2 (1+B).$$

Покажем, что при переходе от точки x_1 к точке x_2, соотношение (5) не меняется. Имеем

$$\left\| [f(x_1,x_2)]^{-1} \right\| L\|f(x_2)\| \left(1 + \left\| [f(x_1,x_2)]^{-1} \right\| \right) \le BL\|f(x_1)\| l \frac{(1-l+B)}{(1-l)^2} <$$

$$< BLl\|f(x_1)\| \frac{(1+B)}{(1-1)} = \frac{l^2}{(1-l)^2}.$$

И если потребовать, чтобы выполнялось соотношение $\dfrac{l^2}{(1-l)^2} \le l$, а это неравенство будет выполнятся при $l < \dfrac{q}{3}$, то получим, что соотношение (5) при переходе от точки x_1 к точке x_2 не нарушается.

Из соотношения (6) следует квадратичная сходимость последовательности $\{x_n\}$, определённой процессом (2), к x^* – решению уравнения (1).

Докажем единственность полученного решения в сфере Ω_δ. Пусть в Ω_δ существует еще одно решение x^{**}. Имеем:

$$\|x^* - x^{**}\| = \left\| x^* - [f(x_1,x_0)]^{-1} f(x^*) - x^{**} + [f(x_1,x_0)]^{-1} f(x^{**}) \right\| \le \left\| [f(x_1,x_0)]^{-1} \right\|$$

$$\left\| f(x_1,x_0)(x^* - x^{**}) - f(x^*) + f(x^{**}) \right\| \le \left\| [f(x_1,x_0)]^{-1} \right\|$$

$$\left\| f(x_1,x_0) - f(x^*,x^{**}) \right\| \|x^* - x^{**}\| = \left\| [f(x_1,x_0)]^{-1} \right\|$$

$$\left\| f(x_1,x_0) - f(x_0,x^*) + f(x_0,x^*) - f(x^*,x^{**}) \right\| \|x^* - x^{**}\| \le \left\| [f(x_1,x_0)]^{-1} \right\|$$

$$L(\|x_1 - x^*\| + \|x_1 - x^{**}\| + \|f(x_1)\|)\|x^* - x^{**}\| \le BL(2r + \|f(x_1)\|)\|x^* - x^{**}\|$$

Если $BL(2r + \|f(x_1)\|) = q$ то решений будет не более одного. Нетрудно найти радиус области единственности. Он равен $r = \dfrac{q - BL\|f(x_1)\|}{2BL}$.

Найдём радиус сферы существования решения. Для этого рассмотрим ряд соотношений, которые следуют из приведённых выше неравенств:

$$\|x_2 - x_1\| \le B\|f(x_1)\|,\quad \|x_3 - x_1\| \le \|x_3 - x_2\| + \|x_2 - x_1\| \le B\|f(x_1)\|\left(1+\frac{1}{(1-l)}\right).$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\|x_{n+1} - x_1\| \le B\|f(x_1)\|\left(1+\frac{1}{(1-l)}+\ldots+\left(\frac{1}{1-l}\right)^{n-1}\right) < B\|f(x_1)\|\frac{1-l}{1-2l},$$

из которой следует, что радиус существования решения $r_{\exists} = \|f(x_1)\|\left(1+B\dfrac{1-l}{1-2l}\right)$.

Чтобы решение в Ω_{δ} существовало и было единственным, достаточно выполнения соотношений $\|f(x_1)\|\left(1+B\dfrac{1-l}{1-2l}\right) \le \dfrac{q-BL\|f(x_1)\|}{2BL}$ и $l < \dfrac{q}{3}$

Теорема доказана.

Предложенные ниже нелокальные варианты метода хорд «работают» при «плохих» начальных приближениях и некоторые из вариантов продолжаемы даже в том случае, если на каких-либо элементах x_n, x_{n-1} оператор $f(x_n, x_{n-1})$ обращается в нуль.

Кроме того, условие (3) часто представляется достаточно обременительным: в ряде важных задач условие симметричности (3) не выполняется, в связи с чем это условие заменяется другим [2]:

$$f(x_1, x_2, x_3)(x_2 - x_3) = f(x_1, x_2) - f(x_1, x_3).$$

Следствием из последнего соотношения является равенство (аналог интерполяционной формулы для операторов)

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0, y)(x - x_0) + f(x_0, x, y)(x - x_0)(x - y), \tag{7}$$

которое положено в основу наших дальнейших рассуждений.

Введение демпфирующего множителя позволяет построить следующий полулокальный итерационный процесс:

<u>Шаг 1.</u> Решается линейное уравнение относительно поправки Δx_n

$$f(x_n, x_{n-1})\Delta x_n = -f(x_n),\quad n = 1,2,\ldots \tag{8}$$

<u>Шаг 2.</u> Очередное приближение находится по правилу

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n,\quad n = 1,2,\ldots \tag{9}$$

<u>Шаг 3.</u> Если $\|f(x_{n+1})\| \le \varepsilon$ и(или) $\|\Delta x_n\| \le \varepsilon$ (ε – параметр останова) – конец просчетов, иначе

<u>Шаг 4.</u> Если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2}\beta_n\right);\ \beta_1 \in [10^{-3}, 10^{-1}];\ n = 1,2,\ldots \tag{10}$$

и переход на шаг 1.

Теорема 2. Пусть в области $D = \bar{S}(x_0, r)$, $r \ge \dfrac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1} + \|x_1 - x_0\|$ существует x^* – решение уравнения (1) и выполняются следующие условия:

a) $\left\| \left[f(x_n, y_n) \right]^{-1} \right\| \le B; \quad x, y \in D.$

b) $\| f(x, y, z) \| \le K; \quad x, y, z \in D.$

c) $\varepsilon_1 = 2\beta_1 K B^2 \| f(x_1) \| < 1.$

Тогда итерационный процесс (8) – (10) со сверхлинейной скоростью (локально с квадратичной) сходится к $x^* \in D$. Оценки погрешности n-го приближения имеет вид:

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1} q_1^{n-1}; q_1 = 1 - \beta_1 (1 - \varepsilon_1).$$

Доказательство.

Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов (7) и условия теоремы, имеем оценку

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &= \|f(x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n)\| = \left\|f(x_n) - \sqrt{\beta_n}\left[f(x_n, x_{n-1})\right]^{-1} f(x_n)\right\| \le \\ &\le (1-\sqrt{\beta_n})\|f(x_n)\| + \|f(x_n, x_{n-1}, x_{n+1})\| \sqrt{\beta_n} \left\|\left[f(x_n, x_{n-1})\right]^{-1} f(x_n)\right\| \|x_{n+1} - x_{n-1}\| \le \\ &\le (1-\sqrt{\beta_n})\|f(x_n)\| + BK\sqrt{\beta_n}\|f(x_n)\| \left(\|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\|\right). \end{aligned} \tag{11}$$

В силу (10) $\forall n$, для которого $\beta_n \ne 1$ справедлива цепочка равенств

$$\beta_{n+1}\|f(x_{n+1})\|^2 = \beta_n\|f(x_n)\|^2 = \beta_{n-1}\|f(x_{n-1})\|^2 = \ldots = \beta_0\|f(x_0)\|^2, \tag{12}$$

перепишем соотношение (11) в виде

$$\begin{aligned} \|f(x_{n+1})\| &\le (1-\sqrt{\beta_n})\|f(x_n)\| + BK\sqrt{\beta_n}\|f(x_n)\| \left(\sqrt{\beta_n}\|\Delta x_n\| + \sqrt{\beta_{n-1}}\|\Delta x_{n-1}\|\right) = \\ &= (1-\sqrt{\beta_n})\|f(x_n)\| + 2K\beta_n\|f(x_n)\|^2 B^2 = \\ &= \left(1-\sqrt{\beta_n}\left(1 - 2KB^2\sqrt{\beta_n}\|f(x_n)\|\right)\right)\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|; \\ q_n &= 1 - \sqrt{\beta_n}(1-\varepsilon_n); \varepsilon_n = 2\sqrt{\beta_n}KB^2\|f(x_n)\|; n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Пусть β_1 таково, что $\varepsilon_1 < 1$, тогда в силу (13) $\|f(x_2)\| \le q_1\|f(x_1)\|$; в этом случае в силу (10) $\beta_2 > \beta_1$. $q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1-\varepsilon_n) < q_1$.

Рассмотрим $\varepsilon_2 = 2\sqrt{\beta_2}KB^2\|f(x_2)\|$, которое в силу (12) равно ε_1, и так как $\beta_2 > \beta_1$, то $q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1-\varepsilon_n) < q_1$.

Таким образом, последовательность итерационных параметров β_n монотонно возрастает, а последовательность элементов q_n – монотонно убывает с ростом n. Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку $\|f(x_{n+1})\| \le \prod_{i=1}^{n} q_i \|f(x_i)\|$, из которой следует слабая сходимость элементов x_n, генерируемых алгоритмом (8) – (10), к x^*.

Справедливо и более сильное утверждение: так как из (11) и условий теоремы имеем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \le \beta_n B\|f(x_n)\| \le \beta_n B \prod_{i=1}^{n-1} q_i \|f(x_i)\|$, то

$$\|x_{n+p}-x_n\| \le \sum_{l=n}^{n+p-1}\|x_{l+1}-x_l\| \le B\sum_{l=n}^{n+p-1}\beta_l\prod_{j=l}^{l-1} q_j \|f(x_l)\| <$$
$$< B\|f(x_1)\|\left(q_1^{n-1}+q_1^{n}+\ldots+q_1^{n+p-2}\right) < \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1}q_1^{n-1}. \quad (14)$$

Из (14) следует фундаментальность последовательности $\{x_n\}$ и в силу полноты пространства X существование предельного элемента, который, как нетрудно убедиться, является решением уравнения (1). Оценка погрешности n-го приближения получается переходом к пределу в (14) при $p \to \infty$. Имеем $\|x_n - x^*\| \le \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1}q_1^{n-1}$.

Радиус сферы $\bar{S}(x_0, r)$ определяем стандартным образом.

$$\|x_2-x_1\| \le B\|f(x_1)\|;\ \|x_3-x_2\|+\|x_2-x_1\| \le B\|f(x_2)\| + B\|f(x_1)\| \le B\|f(x_1)\|(1+q_1)$$

Индуктивно получаются оценки

$$\|x_{n+1}-x_1\| \le B\|f(x_1)\|(1+q_1+\ldots+q_{n-1}) < \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1}.$$

Переход к пределу в последнем неравенстве при $n\to\infty$ позволяет утверждать, что все последовательные приближения не выходят за пределы сферы $\bar{S}(x_0, r)$.

Теорема доказана.

Замечание. Локальная квадратичная скорость сходимости процесса (8) – (10) следует из (13) при $\beta_n=1$. А.С. Сергеевым [1] доказана лишь локальная сверхлинейная скорость сходимости процесса (2).

В теореме 2 требовалось существование a priori существование x^* – решения уравнения (1) и принадлежность его замыканию сферы $\bar{S}(x_0, r)$. Предлагаемая ниже теорема позволяет снять это требование.

Теорема 3. Пусть оператор f удовлетворяет в D тем же условиям, что и в теореме 2, исключая требование существования $x^* \in D$, существует такое число $k \in N$, что выполняются соотношения

$$1 \ge \beta_{n+1} = \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2}\beta_n,\ n=\overline{1,k-1},\ \beta_{k+i}=1;\ i=1,2,\ldots,\ \beta_1 \ge q_1^k. \quad (15)$$

Тогда уравнение (1) имеет решение $x^* \in D$, к которому сходятся итерации (8) – (10), (15), начиная с $x_0, x_1 \in D$.

При этом справедлива оценка погрешности n-го приближения

$$\|x^*-x_n\| \le Bq_1^{2^{n-k}-1+k}\|f(x_1)\|.$$

Доказательство.

Так как выполняются условия теоремы 2, то справедлива оценка (13), $q_i = 1-\beta_i(1-\varepsilon_i) < 1,\ i=\overline{1,k-1}$, а в силу условия (15)

$$\|f(x_{n+1})\| \le 2KB^2\|f(x_n)\|^2,\ n=k+i,\ i=0,1,2,\ldots$$

И при этом величина $\|f(x_n)\|$ такова, что $2KB^2\|f(x_n)\|<1$. Таким образом, локальная квадратичная сходимость наступает на элементе $x_0^* = x_n$, для которого справедливо соотношение
$$q_1^* = 2KB^2\|f(x_n)\|<1.$$

Стандартным рассуждением доказывается фундаментальность последовательности элементов x_n^*, сохранение условия (15) при переходе от точки x_0^* к точке $x_1^* = x_{k+1}$ и справедливость оценки

$$\|f(x_n)\| \le (q_1^*)^{2^{n-1}-1}\|f(x_1)\|, n \ge k.$$

Так что в сфере D существует предельный элемент x^* и справедлива оценка

$$\begin{gathered}\|x_{n+1}-x_1\| \le \sum_{l=1}^{k-1}\|x_{l+1}-x_1\| + \sum_{l=k}^{n}\|x_{l+1}-x_1\| \le \\ \le \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1} + \sum_{l=k}^{n}(q_1^*)^{2^{n-1}-1}\|f(x_1)\| + \|x_1-x_0\| \le \frac{B\|f(x_1)\|}{1-q_1} + \|x_1-x_0\|.\end{gathered} \tag{16}$$

Переходя к пределу в (16) при $n \to \infty$, имеем, что x^* – решение уравнения (1). Оценка погрешности n-го приближения следует из (16) и соотношения

$$\|x^*-x_n\| \le B\|f(x^*)-f(x_n)\| = B\|f(x_n)\| < B(q_1^*)^{2^{n-1}-1+k}\|f(x_1)\|.$$

Теорема доказана.

Теоремы аналогичные теоремам 2 и 3 можно доказать относительно процесса, аналогичному процессу (8) – (10), где β_{n+1} выбирается следующими способами:

1. Одношаговые методы неполного прогноза.

1-й способ – $$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_0)\|\gamma_n}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right), \gamma_{n+1} = \gamma_n\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2. \tag{17}$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \beta_n\Delta x_n$.

2-й способ – $$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\|f(x_n)\|^2\gamma_n}{\|f(x_{n+1})\|^2\beta_n}\right), \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|^2\beta_{n+1}}{\|f(x_{n+1})\|^2\beta_n}, \gamma_0 = \beta_0^2. \tag{18}$$

Очередное приближение находится по формуле $x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n$.

Пусть на каком-нибудь шаге итерационного процесса оператор $f(x_n, x_{n-1})$ обращается в нуль, в этом случае в итерационном процессе поправку Δx_n находим, решая уравнение на шаге 1.

$$(\beta_n\|f(x_n)\|E + f(x_n, x_{n-1}))\Delta x_n = -f(x_n). \tag{19}$$

На шаге 2 вносим поправки в вектор x_n,

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{\beta_n}\Delta x_n. \tag{20}$$

На шаге 3 проверяем условие окончания процесса.

На шаге 4 изменяем шаговую длину по формуле (18) и переходим на шаг 1.

Откуда оценка для $\|\Delta x_n\|$ имеет вид:

$$\|\Delta x_n\| = \|(\beta_n\|f(x_n)\|E + f(x_n, x_{n-1}))^{-1}\|\|f(x_n)\| \le B\|f(x_n)\|,$$

$$\left\| \left(\delta\beta_n\|f(x_n)\|E + f(x_n,x_{n-1})\right)^{-1}\right\| \le B. \tag{21}$$

Теорема 4. Пусть в области *D* существует x^* – решение уравнения (1). Тогда при нахождении шаговой длины по формулам (18), условия б) теоремы 2 и соотношения

$$\varepsilon_1 = \beta_1 B\|f(x_1)\|(\delta + 2BK) < 1, \tag{22}$$

итерационный процесс (19), (20), (18) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* и справедливы оценки погрешности *n*-го приближения:

$$\|x_n - x^*\| \le B\frac{\|f(x_1)\|}{1-q_1}q_1^{n-1}, q_1 = 1 - \beta_1(1-\varepsilon_1). \tag{23}$$

Доказательство.

Представим уравнение (19) в «неявном» виде

$$f(x_n,x_{n-1})\Delta x_n = -f(x_n) - \delta\beta_1\|f(x_n)\|\Delta x_n.$$

В силу условий теоремы и аналога формулы Ньютона для операторов имеем оценку

$$\|f(x_{n+1})\| = \|f(x_n + \beta_n\Delta x_n)\| \le$$
$$\le \|f(x_n) - \beta_n f(x_n) - \delta\beta_n^2\|f(x_n)\|\Delta x_n\| + \beta_n K\|\Delta x_n\|\|x_n + \beta_n\Delta x_n - x_{n-1}\| \le$$
$$\le (1-\sqrt{\beta_n})\|f(x_n)\| + \delta\beta_n^2 B\|f(x_n)\|^2 + \beta_n KB\|f(x_n)\|(\beta_n\|\Delta x_n\| + \beta_{n-1}\|\Delta x_{n-1}\|) \le$$
$$\le (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + \delta\beta_n^2 B\|f(x_n)\|^2 + \beta_n KB^2\|f(x_n)\|(\beta_n\|f(x_n)\| + \beta_{n-1}\|f(x_{n-1})\|).$$

Из (18) следует, что $\beta_n\|f(x_n)\| = \beta_{n-1}\|f(x_{n-1})\|$, в силу чего оценка для $\|f(x_{n+1})\|$ принимает вид:

$$\begin{aligned}\|f(x_{n+1})\| &\le (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + \delta\beta_n^2 B\|f(x_n)\|^2 + 2\beta_n^2B^2K\|f(x_n)\|^2 = \\ &= (1-\beta_n(1-\beta_n B\|f(x_n)\|(\delta+2BK)))\|f(x_n)\|.\end{aligned} \tag{24}$$

Так как в силу (22) $\varepsilon_1 = \beta_1 B\|f(x_1)\|(\delta + 2BK) < 1$, то

$$\|f(x_2)\| = (1-\beta_1(1-\varepsilon_1))\|f(x_1)\| = q_1\|f(x_1)\|, q_1 < 1.$$

Поскольку $\|f(x_2)\| < \|f(x_1)\|$, тогда $\beta_2 > \beta_1$.

С учетом последних соотношений имеем, что

$$\varepsilon_2 = \beta_2 B\|f(x_2)\|(\delta + 2BK) = \beta_1 B\|f(x_1)\|(\delta + 2BK) = \varepsilon_1,$$
$$\|f(x_3)\| \le (1-\beta_2(1-\varepsilon_2))\|f(x_2)\| = q_2\|f(x_2)\| \le q_2q_1\|f(x_1)\|, q_2 < q_1, \beta_2 > \beta_1.$$

Индуктивные рассуждения позволяют получить оценку

$$\|f(x_{n+1})\| \le \prod_{i=1}^{n} q_i\|f(x_i)\|. \tag{25}$$

При этом последовательность элементов q_i монотонно убывает, а последовательность итерационных параметров β_n монотонно возрастает.

Переходя к пределу в (25) при $n \to \infty$, убеждаемся в том, что последовательность элементов x_n, генерируемая формулами (19), (20), (18), сходится по функционалу к x^*. Стандартными рассуждениями нетрудно показать сильную (по норме) сходимость последовательности элементов x_n к x^* и справедливость оценки (23).

Сверхлинейность процесса следует из (24) при $\beta_n \to 1$.

Теорема доказана.

Относительно оператора f обычно полагают, что $f \in C_D^{(2)}$ и в D существует ограниченный обратный оператор $\left[f^{/}(x)\right]^{-1}$. В ряде важных практических задач оператор f лишь непрерывен в D и $\forall x_1, x_2, x_3 \in D$ выполняются условия

$$\begin{aligned} &\left\| \left[f(x_1,x_2)\right]^{-1} \right\| \le B; B > 0, \\ &\left\| f(x_1,x_2,x_3) \right\| \le K, \text{где } K > 0, \\ &\left\| E - f(x_1,x_2) \right\| \le M; M > 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $f(x_1, x_2)$ – разностное отношение первого порядка оператора f [2]. Ниже будем рассматривать уравнения с негладкими операторами.

Нерегуляризованные полулокальные алгоритмы. Алгоритмы типа Стефферсона.

Пусть оператор $f(x) \in C_D$ и такой, что выполняются условия (26). Рассмотрим итерационный процесс

$$\begin{gathered} x_{n+1} = x_n - \beta_n \left[f(x_n, y_n)\right]^{-1} f(x_n) = x_n - \beta_n \Delta x_n, \\ y_n = x_n - \beta_n f(x_n); n = 0,1,..., \beta_n \in (0,1]. \end{gathered} \tag{27}$$

Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов [2] и соотношение (27), имеем оценку

$$\begin{gathered} \left\| f(x_{n+1}) \right\| = \left\| f(x_n) + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n, y_n, x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - y_n) \right\| \le \\ \le (1 - \beta_n) \left\| f(x_n) \right\| + K \left\| x_{n+1} - x_n \right\| \left\| x_{n+1} - y_n \right\| \le \\ \le (1 - \beta_n) \left\| f(x_n) \right\| + K \beta_n^2 \left\| \Delta x_n \right\| BM \left\| f(x_n) \right\| \le \\ \left[1 - \beta_n \left(1 - \beta_n K B^2 M \left\| f(x_n) \right\|\right)\right] \left\| f(x_n) \right\| < \left[1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)\right] \left\| f(x_n) \right\| = q_n \left\| f(x_n) \right\|, \\ \varepsilon_n = \beta_n K B^2 (1 + M) \left\| f(x_n) \right\|; q = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n). \end{gathered} \tag{28}$$

Соотношение (28) является базовым при рассмотрении семейства итерационных процессов, которые получаются при различных способах введения итерационных параметров β_n (способах регулировки шага). Если, следуя идеям работы [3], определить итерационные параметры β_n следующим образом:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\left\| f(x_n) \right\| \gamma_n}{\beta_n \left\| f(x_{n+1}) \right\|}\right); \beta_0 \in (10^{-4}, 10^{-1}); n = 0,..., \tag{29}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \left\| f(x_n) \right\| \beta_{n+1}}{\left\| f(x_{n+1}) \right\| \beta_n}, \ \gamma_0 = \beta_0^2,$$

то, взяв β_0 таким, чтобы выполнялось соотношение $\varepsilon_0 = \beta_0 KB^2(1+M)\|f(x_0)\| < 1$, из (28), (29) имеем, что $q_0 < 1$; $\|f(x_1)\| \le q_0 \|f(x_0)\|$ и $\beta_1 > \beta_0$. Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что итерационные параметры образуют монотонно возрастающую последовательность, нормы последовательности элементов $\|f(x_n)\|$ монотонно убывают к нулю, все $q_i < 1$, и если в области $D = \bar{S}\left(x_0, \frac{\|\Delta x_0\|}{1-q_0}\right)$ решение x^* – уравнения (1) существует, то итерационный процесс (27), (29) сходится к x^*. Нетрудно проверить, что процесс (27), (29) с $\beta_n = 1$ имеет квадратичную скорость сходимости. Действительно, из (28) при $\beta_n = 1$ имеем, что $\|f(x_{n+1})\| \le KB^2(1+M)\|f(x_n)\|^2$ или $q_{n+1} \le q_n^2$. Из последнего неравенства следует, что достаточным условием квадратичной сходимости процесса (27) с $\beta_n = 1$ является условие

$$KB^2(1+M)\|f(x_n)\| = q_n < 1.$$

В процессе реализации алгоритма (27), (29) это условие при некотором номере k начинает выполняться. Тогда, как следует из (29), β_i для $i > k$ будут равными единице. Таким образом, нами доказана

Теорема 5. Пусть в области $D = \bar{S}\left(x_0, \frac{\|\Delta x_0\|}{1-q_0}\right)$ существует решение x^* и оператор f удовлетворяет условиям (26). Тогда, если $\varepsilon_0 < 1$, итерационный процесс (27), (29) со сверхлинейной (локально квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Замечание 1. Итерационный процесс лишь символически записывается в виде (27). В действительности реализуется следующая пошаговая процедура, при этом β_n находится по некоторому правилу.

Шаг 1. Решается линейная система

$$f(x_n, y_n)\Delta x_n = -f(x_n); y_n = x_n - \beta_n f(x_n); n = 0,...$$

Шаг 2. $x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n$.

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$ и (или) $\|\Delta x_n\| = \|x_{n+1} - x_n\| < \varepsilon$ (ε – параметр останова, $\varepsilon << 1$), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг4. Если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} := 1$, иначе β_{n+1} находим по правилу (29) и переход на шаг 1.

Замечание 2. При использовании процесса знание оценок глобальных констант *K, B, M* не требуется, важен лишь факт их существования.

Замечание 3. В работе [4] доказана локальная квадратичная сходимость процесса (27) с $\beta_n = 1$ для случая, когда оператор разделённой разности первого порядка симметричен, т.е. выполняется условие $f(x, y-x) = f(y, x-y)$. Это требование, как показано в [2], является чрезвычайно обременительным, и ему не удовлетворяют операторы разделённой разности первого порядка во всех важных для практики случаях.

Выше доказана локальная квадратичная сходимость процесса (27) с $\beta_n = 1$ без использования симметричности оператора разделённой разности первого порядка.

Требование существования ограниченного оператора $f(x_1, x_2)^{-1}$ во всей области D является также достаточно обременительным условием. Попытаемся снять это условие, для чего, следуя идеям работы [3], введём соотношения, связывающие нормы операторов $f(x_0, y_0)^{-1}$ и $f(x_1, y_1)^{-1}$:

$$\left\| E - f(x_0, y_0)^{-1} f(x_1, y_1) \right\| = \left\| f(x_0, y_0)^{-1} (f(x_0, y_0) - f(x_1, y_1) \right\| \le$$

$$\le \left\| f(x_0, y_0)^{-1} \right\| \left\| f(x_0, y_0) - f(y_0, x_1) + f(y_0, x_1) - f(x_1, y_0) \right\| \le$$

$$\le B_0 K (\|\Delta x_0\| + \|\Delta y_0\|) < B_0 K (1 + M) \|\Delta x_0\| = l_0$$

Здесь $B_0 = \left\| f(x_0, y_0^{-1} \right\|; \|\Delta y_0\| = \|y_1 - y_0\|$.

Если $l_0 < 1$, то в силу теоремы Банаха существует оператор, обратный оператору $f(x_0, y_0)^{-1} f(x_1, y_1)$ и справедлива оценка $\left\| f(x_1, y_1)^{-1} \right\| \le B_0 (1 - l_0)^{-1}$. Используя аналог интерполяционной формулы Ньютона для операторов и формулу (27) при $\beta_n = 1$, получим оценку

$$\| f(x_1) \| = \left\| f(x_0 - f(x_1, y_1)^{-1} f(x_0)) \right\| \le KM \|\Delta x_0\|^2 < \frac{l_0}{B_0} \|\Delta x_0\|. \tag{30}$$

Тогда определим l_0 так, чтобы при переходе от точки x_0 к точке x_1 выполнялось соотношение $l_1 \le l_0$, где

$$l_1 = B_1 K (1 + M) \|\Delta x_1\| \le \le \frac{B_0 K (1 + M) l_0 \|\Delta x_0\|}{(1 - l_0)^2} \le \frac{l_0^2}{(1 - l_0)^2}.$$

Неравенство $\frac{l_0^2}{(1 - l_0)^2} \le l_0$ справедливо при $l_0 \le \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Нетрудно получить радиус области существования решения уравнения (1) в сфере $S(x_0, r_\exists)$. Учитывая (30), получаем оценку для сходящегося процесса (27) с $\beta_n = 1$

$$r_\exists \le \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \le \|\Delta x_0\| + B_1 \| f(x_1) \| + B_2 \| f(x_2) \| + \ldots \le$$

$$\le \|\Delta x_0\| + \frac{l_0}{1 - l_0} \|\Delta x_0\| + \frac{l_0^2}{(1 - l_0)^2} \|\Delta x_0\| + \ldots \le \frac{1 - l_0}{1 - 2 l_0} \|\Delta x_0\|. \tag{31}$$

Наряду с оценкой (31) может быть получена оценка

$$r_\exists = \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \le \|\Delta x_0\| + \|\Delta x_1\| + \frac{B_1}{1 - l_1 B_1} \frac{l_1}{B_1} \|\Delta x_1\| +$$

$$+ \frac{l_1^2}{(1 - l_1)^2} \|\Delta x_1\| + \ldots \le \|\Delta x_0\| + \frac{1 - l_0}{1 - 2 l_0} \|\Delta x_1\|. \tag{32}$$

Найдём условие, при выполнении которого решений в области $S(x_0, r)$ не более одного. Положим, что в $S(x_0, r)$ существуют два решения: x^* и x^{**}. Тогда, если имеют место соотношения (26), получим оценку

$$\begin{aligned}\left\|x^{*}-x^{**}\right\| &= \left\|x^{*}-x^{**}-\ f(x_0,y_0\ ^{-1}(f(x^{*})-f(x^{**}))\right\| \le \\ &\le \left\|\ f(x_0,y_0\ ^{-1}\right\|\left\|f(x_0,y_0)-f(x^{*}.x^{**})(x^{*}-x^{**})\right\| \le \\ &\le B_0(\left\|f(x_0,y_0)-f(y_0,x^{*})\right\|+\left\|f(y_0,x^{*})-f(x^{*},x^{**})\right\| \le \\ &\le B_0K(\left\|x_0-x^{*}\right\|+\left\|y_0-x^{**}\right\|) \le B_0K(1+M)\delta\left\|x^{*}-x^{**}\right\|.\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь $\delta = r$. Если в (33) потребовать, чтобы $B_0K(1+M)\delta = q < 1$ или $\delta = \dfrac{q}{B_0K(1+M)}$, то в сфере $S(x_{0,}\delta)$ будет не более одного решения.

В условиях сходящегося процесса (27) с $\beta_n = 1$ рассмотрим неравенство

$$\frac{1-l_0}{1-2l_0}\left\|\Delta x_0\right\| \le \frac{q}{B_0K(1+M)} = \frac{q\left\|\Delta x_0\right\|}{l_0}, \tag{34}$$

которое равносильно утверждению $r_{\exists} \le r$. Из (34) следует оценка

$$l_0 \le \frac{1+2q-\sqrt{1+4q^2}}{2} = F(q) < \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \tag{35}$$

Если в качестве $r_{\exists}$ взять правую часть соотношения (32) и потребовать выполнение условия

$$\left\|\Delta x_0\right\| + \frac{1-l_0}{1-2l_0}\left\|\Delta x_1\right\| \le \frac{q}{B_0K(1+M)} = \frac{q\left\|\Delta x_0\right\|}{l_0}, \tag{36}$$

то неравенство (36) также равносильно утверждению $r_{\exists} \le r$. Из оценки (36) имеем соотношение, связывающее нормы поправок на соседних шагах:

$$\left\|\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\right\| \le \left(\frac{q}{l_0}-1\right)\frac{1-2l_0}{1-l_0} = G(l_0). \tag{37}$$

Так как $G'_{l_0}(l_0) < 0,$ то $G(F(q)) \le G(l_0).$ Тогда из выполнения соотношения

$$\left\|\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0}\right\| \le \left(\frac{q}{F(q)}-1\right)\frac{1-2F(q)}{1-F(q)} \tag{38}$$

будет следовать неравенство (37). Таким образом, из сходимости процесса и утверждения $r_{\exists} \le r$ следует (38). С другой стороны, если выполняется соотношение (38), то $r_{\exists} \le r$. В самом деле, соотношение (38) эквивалентно

$$\left\|\Delta x_0\right\| + \frac{1-F(q)}{1-2F(q)}\left\|\Delta x_1\right\| \le \frac{q\left\|\Delta x_0\right\|}{F(q)}. \tag{39}$$

Но в условиях сходящегося процесса величина $\dfrac{q\left\|\Delta x_0\right\|}{F(q)}$ – минимальный радиус единственности, поэтому из (39) и сходимости процесса следует, что $l_0 \le F(q)$, а это условие того, что $r_{\exists} \le r$.

Таким образом, может быть сформулирована

Теорема 6. Пусть оператор *f* удовлетворяет в D условиям (26). Тогда итерационный процесс (27) с $\beta_n = 1$ при выполнении соотношения (38) с квадратичной скоростью сходится к единственному в $S\left(x_0, \frac{q\|\Delta x_0\|}{F(q)}\right) \subset D$ решению уравнения (1).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев, А. С. О методе хорд / А. С. Сергеев // Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. 11, № 2. – С. 282–289.
2. Ульм, С. Ю. Об обобщенных разделенных разностях / С. Ю. Ульм // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1967. – Т. 16, № 1. – С. 13–25.
3. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.
4. Бартиш, М. Я. О некоторых итерационных методах решения функциональных уравнений / М. Я. Бартиш // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10, № 3.– С. 488–493.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 06.10.2016

Madorskiy V.M. **On Nonlocal Variant of the Method of Chords and Steffens**

We consider a number of quasi-Newton methods semilocal solutions of nonlinear operator equations by nonregularized and partially regularized methods of chords and Stephenson. Proved superlinear convergence of the iterative process with the «bad» initial approximation.