УДК 519.6 + 517.983.54

В.Ф. Савчук[1], О.В. Матысик[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]канд. физ.-мат. наук, доц.,
зав. каф. прикладной математики и технологий программирования
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

АПОСТЕРИОРНЫЙ ВЫБОР МОМЕНТА ОСТАНОВА В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Для решения линейных операторных уравнений I рода с ограниченным несамосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для этого метода обосновывается возможность применения правила останова по соседним приближениям, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость метода, получена оценка для момента останова.

1. Постановка задачи.

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – оператор несамосопряженный и ограниченный. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left[\left(A^*A\right)^{2k} + B\right]^{-1}\left[Bx_n + \left(A^*A\right)^{2k-1}A^*y\right], \; x_0 = 0, \quad k \in N, \tag{2}$$

где E – единичный оператор, а B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE, b > 0$. Обычно правая часть уравнения неизвестна, а вместо неё известно y_δ, такое, что $\|y - y_\delta\| \le \delta$. Тогда метод (2) примет вид

$$\begin{gathered} z_{n+1} = \left[\left(A^*A\right)^{2k} + B\right]^{-1}\left[Bz_n + \left(A^*A\right)^{2k-1}A^*y_\delta\right] + \\ + \left[\left(A^*A\right)^{2k} + B\right]^{-1}Bu_n, \; z_0 \in H, \; k \in N, \end{gathered} \tag{3}$$

где u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left[\left(A^*A\right)^{2k} + B\right]^{-1}B$, $D = \left[\left(A^*A\right)^{2k} + B\right]^{-1}\left(A^*A\right)^{2k-1}A^*$, тогда итерационный метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + Dy_\delta + Cu_n. \tag{4}$$

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора A. Там доказано, что при условии $b > 0$ метод (3) сходится и в предположении, что точное решение x уравнения (1) истокопредставимо, получена априорная оценка погрешности.

2. Правило останова по соседним приближениям.

В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2; 3]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим неравенствами

$$\begin{aligned} &\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

Лемма 1. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0, \ \omega_{n+1} = C\omega_n + Dy + Cu_n, \ n \ge 0. \tag{6}$$

Тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$

Доказательство.

Из (6) при $n = k$ имеем $Cu_k = \omega_{k+1} - C\omega_k - Dy$. Отсюда, используя равенство $A^*Ax = A^*y$, получим

$$u_k = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}Dy = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k -$$

$$-\left[\left(A^*A\right)^{2k} + B\right]\left[\left(A^*A\right)^{2k} + B\right]^{-1}\left(A^*A\right)^{2k-1}A^*y = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - \left(A^*A\right)^{2k}x =$$

$$= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}(E - C)x = C^{-1}(\omega_{k+1} - x) - (\omega_k - x).$$

Обозначим $\Delta_k = \omega_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - \\ &- 2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}, \ n \ge 1. \tag{8}$$

Покажем, что $(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k$, $k \ge 0$. Имеем $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, тогда $\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$, $\omega_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \omega_{k+1} - x$, отсюда следует, что

$$(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k, \ k \ge 0. \tag{9}$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (8) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n} (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) +$$

$$+ 2\sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) +$$

$$+ 2\sum_{k=0}^{n} ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + 2\sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) -$$

$$- 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} = -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n} ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + \gamma_n,$$

где $\gamma_n = 2\sum_{k=0}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{k=1}^{n} (C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}$. Нетрудно показать, что $\gamma_n \geq 0$ при любых $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$.

Тогда $\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n} ((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k)$. Используя равенство (9), получим $\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^{n} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2$,

откуда $\sum_{k=0}^{n} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *При* $\forall \omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \leq \beta$, *выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \|\omega_n - \omega_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\beta \leq \|C\|\beta +$$

$$+ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|C\|\beta + \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{\frac{1}{n}\|\omega_0 - x\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{\frac{1}{n}\|\omega_0 - x\|^2 + \frac{1}{n}\cdot n \cdot \|C\|^2 \beta^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta,$$

так как $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\|\omega_0 - x\|^2 = 0$. Отсюда следует (10). Лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta)(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}Dy_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{11}$$

При $n = 1$ из $z_n = Cz_{n-1} + Dy_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + Dy_\delta + Cu_0$, из (11) получим то же самое, т.е. при $n = 1$ формула (11) верна. Предположим, что (11) верна при $n = p$, т.е. $z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}Dy_\delta + u_{p-k-1}\right)$, и докажем её справедливость при $n = p + 1$. Имеем

$$z_{p+1} = Cz_p + Dy_\delta + Cu_p = C\left(C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}Dy_\delta + u_{p-k-1}\right)\right) + Dy_\delta + Cu_p =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C^2\left(C^{-1}Dy_\delta + u_{p-1} + Dy_\delta + Cu_{p-2} + CDy_\delta + C^2u_{p-3} + \ldots +\right.$$

$$\left. + C^{p-2}Dy_\delta + C^{p-1}u_0\right) + Dy_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 + C\left(Dy_\delta + Cu_{p-1} +\right.$$

$$\left. + CDy_\delta + C^2u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}Dy_\delta + C^p u_0 + C^{-1}Dy_\delta + u_p\right) =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k\left(C^{-1}Dy_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (11) доказана. Отсюда

$$\omega_n = C^n\omega_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k(C^{-1}Dy + u_{n-k-1}) = C^n\omega_0 + (E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})Dy +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E - C)A^*y +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}(E - C^n)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$

$$= C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y - A^{-1}(E - C^n)y + A^{-1}(E - C^n)y_\delta +$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}\omega_0 - A^{-1}(E-C^{n+1})y + A^{-1}(E-C^{n+1})y - A^{-1}(E-C^{n+1})y_\delta -$$

$$-C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1}C^n(E-C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n D(y - y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|\omega_n - \omega_{n+1}\| + \left\|C^n D(y-y_\delta)\right\|. \qquad (12)$$

Обозначим $\sigma = D(y - y_\delta)$, тогда

$$\left\|C^n D(y-y_\delta)\right\| = \left\|C^n\sigma\right\| = \left\|\int_{-M}^{M} \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n} dE_\lambda\sigma\right\| \le \left\|\int_{0}^{M} \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n} dE_\lambda\sigma\right\| +$$

$$+\left\|\int_{-M}^{0} \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n} dE_\lambda\sigma\right\| = \|I_1\| + \|I_2\|.$$

Каждый из полученных интегралов разобьём на два интеграла

$$I_1 = \int_0^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n} dE_\lambda\sigma + \int_{\varepsilon_0}^{M} \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n} dE_\lambda\sigma.$$

Так как $\dfrac{b}{\lambda^{2k}+b} \le q(\varepsilon_0) < 1$ для $\lambda \ge \varepsilon_0$,

то $\left\|\int_{\varepsilon_0}^{M} \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n} dE_\lambda\sigma\right\| \le q^n(\varepsilon_0)\left\|\int_{\varepsilon_0}^{M} dE_\lambda\sigma\right\| \le q^n(\varepsilon_0)\|\sigma\| \to 0,\ n\to\infty.$

А для первого интеграла $\left\|\int_0^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{\left(\lambda^{2k}+b\right)^n} dE_\lambda\sigma\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda\sigma\right\| = \left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\| \to 0,\ \varepsilon_0 \to 0$

в силу свойств спектральной функции. Таким образом, $\|I_1\| \to 0, \quad n\to\infty.$

Аналогично $\|I_2\| \to 0, \quad n \to \infty.$ Следовательно, $\left\|C^n D(y-y_\delta)\right\| \to 0,\ n\to\infty.$ Поэтому $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|z_n - z_{n+1}\| = \underline{\lim}_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\|.$ Из леммы 2 вытекает неравенство $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|z_n - z_{n+1}\| = \underline{\lim}_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta.$

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|D\|\delta,\ (n < m'),\\ &\|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|D\|\delta. \end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

Из (12) следует, что $m \le m'$. Из леммы 1 при $n = m'$

получим $\sum_{k=0}^{m'}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо

$\sum_{k=0}^{m'-1}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$. Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1}\left(\|\omega_k-\omega_{k+1}\|-\|C\|\beta\right)^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$$

Так как по (13) при $n<m'$ имеем $\|\omega_n-\omega_{n+1}\|>\varepsilon-\|D\|\delta$,

то $m'\left(\varepsilon-\|D\|\delta-\|C\|\beta\right)^2\le\|\omega_0-x\|^2+m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $\omega_0=z_0$ и $m\le m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m\le m'\le\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|D\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|D\|\delta)}.$$

в) Докажем, что

$$x=C^nx+\sum_{k=0}^{n-1}DC^ky. \qquad (14)$$

Предположим, что (14) верно, тогда

$$x-C^nx=D\left(E+C+C^2+\ldots+C^{n-1}\right)y,$$

$$(E-C^n)x=D(E-C^n)(E-C)^{-1}y,$$

$$(E-C^n)x=A^{-1}(E-C)(E-C^n)(E-C)^{-1}Ax,$$

$$(E-C^n)x=(E-C^n)x.$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (14) доказана.

Из (11) вычтем (14), получим

$$z_n-x=C^n(z_0-x)+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left[C^{-1}D(y_\delta-y)+u_{n-k-1}\right]. \qquad (15)$$

Отсюда $\Delta_n=C^n\Delta_0+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left[C^{-1}D(y_\delta-y)+u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n=z_n-x$ и $\Delta_0=z_0-x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\|\le\left\|C^n\Delta_0\right\|+\left(\|D\|\delta+\|C\|\beta\right)n. \qquad (16)$$

В частности, (16) справедливо и при $n=m$. Если $m\to\infty$ при $\varepsilon,\delta,\beta\to0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m\Delta_0\right\|\to0,\ m\to\infty$. Поэтому для доказательства $\|z_m-x\|\to0,\ \delta\to0,\ \beta\to0$ достаточно показать, что $m\left(\|D\|\delta+\|C\|\beta\right)\to0$, $m\to\infty,\ \delta\to0,\ \beta\to0$. Из (15) получим

$$z_n-z_{n+1}=C^n(E-C)(z_0-x)-Cu_n-C^nD(y_\delta-y)+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k(E-C)u_{n-k-1}. \qquad (17)$$

Так как спектр оператора $C=\left[\left(A^*A\right)^{2k}+B\right]^{-1}B$ принадлежит [0,1], то можно доказать, что

$$\left\|C^n(E-C)\right\|\le\frac{1}{n+1}. \qquad (18)$$

Поэтому из (17) получим при $n=m-1$

$$\|z_{m-1}-z_m\| \le \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E-C)(z_0-x) \right\| + \left\| C^{m-1} D(y_\delta - y) \right\| + \|Cu_{m-1}\| +$$

$$+\left\| C\sum_{k=0}^{m-2} C^k (E-C) u_{m-k-2} \right\| \le \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E-C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0-x) \right\| + \|C\|\beta + \|D\|\delta +$$

$$+\|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0-x) \right\| + \|D\|\delta + \|C\|\beta(2+\ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \le 1+\ln m$ ([4]).

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta^p\right), d>1, p \in (0,1),$ то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|D\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим

$$m \le \frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}.$$

Поскольку $\|z_{m-1}-z_m\| > \varepsilon,$ то $\varepsilon \le \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0-x) \right\| + \|D\|\delta + \|C\|(2+\ln m)\beta.$

Отсюда получим, что

$$m \le \frac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0-x) \right\|}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta(2+\ln m)}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\|D\|\delta + \|C\|\beta,$ получим

$$m\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \frac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0-x) \right\| \left(\|D\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta\left[2+\ln \frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}\right]}.$$ При $m \to \infty$ множитель $\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0-x) \right\| \to 0,$ а дробь $\frac{2(\|D\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|D\|\delta - \|C\|\beta\left[2+\ln \frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon - \|D\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|D\|\delta)}\right]}$ ограничена при $\delta, \beta \to 0.$ Поэтому $m\left(\|D\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ при $m \to \infty, \delta, \beta \to 0.$ Отсюда и из неравенства (16) при $m \to \infty$ получим

$$\lim_{\delta,\beta \to 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta \to 0} \|z_m - x\| = \lim_{\delta,\beta \to 0} \left(\left\| C^m \Delta_0 \right\| + m(\|D\|\delta + \|C\|\beta) \right) = 0.$$

Итак, доказано, что $\lim_{\delta,\beta \to 0} \left\| z_m - x \right\| = 0$ при $m \to \infty$, т. е. метод (3) с правилом останова (5) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 77–83.

2. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

3. Савчук, В. Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

4. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука. – 1971. – 1108 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.02.2015

Savchuk V.F., Matysik O.V. **Choosing the Stopping Posteriori in an Implicit Iteration Method for Solution Ill-posed Problem with Non Self-adjoint Operator**

In the Hilbert space for solving linear operator equations of type I with limited non-adjoint operator the implicit iteration method is proposed. The application of a rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. The convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.