УДК 517.5

А.М. Пиддубный

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. дифференциальных уравнений и математической физики Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки (г. Луцк, Украина)

КЛАССЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе изучаются классы аналитических функций в единичном круге комплексной плоскости. Найдены условия вложения рассматриваемых классов.

Сформулируем сначала некоторые определения понятий и некоторые известные факты, используемые в работе. Пусть $D=\{z\in C:|z|\le 1\}$ – единичный круг, $T=\{z\in C:|z|=1\}$ – единичная окружность комплексной плоскости, $\overline{D}=D\bigcup T$. В данной работе изложены результаты исследования поведения производных высших порядков аналитических функций в контексте такой теоремы.

Теорема Харди – Литтлвуда [1]. Пусть f – функция, аналитическая в круге D, $0<\alpha<1$ и $\beta>\alpha$. Для того, чтобы f была непрерывной в $\overline{D}$ и

$$|f(z_1)-f(z_2)|\le C|z_1-z_2|^{\alpha},\quad z_1,z_2\in\overline{D},\ C=const>0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\left|f^{(\beta)}(z))\right|\le\dfrac{KC}{(1-|z|)^{\beta-\alpha}},\quad \forall z\in D,$

где $f^{(\beta)}(z):=\sum\limits_{k=[\beta]}^{\infty}\dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\beta)}\hat{f}_k\, z^{k-[\beta]},\quad \hat{f}_k:=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!},\quad z\in D,$ – дробная производная порядка β в смысле Римана – Лиувилля (например, [2, § 22]), $K=K(\alpha,\beta)=const.$

Определение 1. Пускай $\lambda:R_+\to R_+$ – непрерывная возрастающая функция, $\lambda(0)=0.$ Будем говорить, что функция $f:D\to C$ принадлежит классу $Lip_\lambda(D),$ если

$$|f|_{Lip_\lambda}:=\sup_{z_1,z_2\in D}\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{\lambda(|z_1-z_2|)}<\infty.$$

Если при этом функция f аналитическая в D, то будем писать $f\in ALip_\lambda(D),$ а если к тому же f является непрерывной в $\overline{D}$, то будем писать $f\in ALip_\lambda(\overline{D}).$

Обозначим через $A(\overline{D})$ пространство функций, аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$ с нормой $\|f\|:=\max\limits_{z\in\overline{D}}|f(z)|.$

Замечание 1. Если $f\in ALip_\lambda(\overline{D}),$ то $|f|_{Lip_\lambda}=\sup\limits_{z_1,z_2\in T}\dfrac{|f(z_1)-f(z_2)|}{\lambda(|z_1-z_2|)}<\infty.$

В этом легко убедиться, рассмотрев функции, которые являются алгебраическими многочленами, а затем воспользоваться теоремой о плотности алгебраических многочленов в пространстве $A(\overline{D})$.

Вполне понятно также, что $ALip_\lambda(\overline{D})\subset ALip_\lambda(D)\subset H_\infty,$ где H_∞ – пространство ограниченных аналитических функций.

Определение 2. Пускай $\lambda: R_+ \to R_+$ – непрерывная возрастающая функция, $\lambda(t) > 0,\ t > 0,\ \lambda(0) = 0.$ Будем говорить, что функция $f: D \to C$ принадлежит классу $\mathfrak{B}_\lambda^k$, если $\left|f\right|_{\mathfrak{B}_\lambda^k} := \sup\limits_{z\in D} \dfrac{(1-|z|)^k}{|\lambda(1-|z|)|}\left|f^{(k)}(z)\right| < \infty.$

Замечание 2. Для того, чтобы классы $\mathfrak{B}_\lambda^k$ были не тривиальными, т.е. состояли не только из алгебраических многочленов степени не выше $k-1$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{t\to 0+} \inf \dfrac{\lambda(t)}{t^k} > 0.$

Действительно, достаточность этого утверждения очевидна, а необходимость можно установить с помощью следующих соображений.

Пускай функция f не является алгебраическим многочленом степени не выше $k-1$, т.е. $f^{(k)} \not\equiv 0.$ Тогда найдётся $m \in Z_+$ такое, что

$$0 < \frac{1}{2^m}\frac{(m+k)!}{m!}\left|\hat{f}_{m+k}\right| \le r^m \frac{(m+k)!}{m!}\left|\hat{f}_{m+k}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f^{(k)}(re^{it})e^{-imt}dt\right| \le \frac{\lambda(1-r)}{(1-r)^k} \qquad \forall r \in [\frac{1}{2}, 1).$$

Эти соотношения и доказывают достаточность.

Вернемся еще раз к теореме Харди – Литтлвуда. Пусть $\lambda(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1,$ и $\beta = k,\ k \in N.$ Тогда теорему Харди – Литтлвуда в принятых обозначениях можно переписать в таком виде: для аналитической в круге D функции f

$$\left|f\right|_{Lip_\lambda} < \infty \Leftrightarrow \left|f\right|_{\mathfrak{B}_\lambda^k} < \infty,$$

или в равносильной форме

$$ALip_\lambda(D) = \mathfrak{B}_\lambda^k, \quad k \in N. \tag{1}$$

Возникает задача: при каких условиях на функцию $\lambda(t)$ равенство (1) будет иметь место в общем случае, т.е. описать множество всех неубывающих функций $\lambda: R_+ \to R_+,$ $\lambda(t) > 0,\ t > 0,$ для которых выполняется равенство (1).

Связь между классами $ALip_\lambda(D)$ и $\mathfrak{B}_\lambda^k$ описывается следующими двумя утверждениями.

Теорема 1. Пусть $\lambda: R_+ \to R_+$ – непрерывная неубывающая функция, $\lambda(t) > 0,\ t > 0,$ и $\lambda(0) = 0.$ Тогда

$$ALip_\lambda(D) \subset \mathfrak{B}_\lambda^1 \subset \mathfrak{B}_\lambda^2 \subset \ldots \subset \mathfrak{B}_\lambda^k \subset \ \ldots \tag{2}$$

Доказательство.

Первое вложение можно считать известым фактом [3], но не будет лишним привести его доказательство, которое основывается на технике K-функционала. Известно, что K-функционал дробного порядка *r* в пространстве $A(\overline{D})$ определяется так:

$$K_r(\delta, f) := \inf_{g: g^{(r)}\in H_p}\left(\left\|f-g\right\| + \delta\left\|g^{(r)}\right\|\right),\ 0 < p \le \infty.$$

Пусть $f \in ALip_\lambda(D).$ По формуле Коши для произвольной аналитической функции g, такой, что $g' \in A(\overline{D})$

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{it})-g(e^{it})}{(Re^{it}-z)^2}Re^{it}dt+g'\left(\frac{z}{R}\right),\quad |z|<R<1.$$

Отсюда следует оценка

$$|f'(z)|\le\|f(R\cdot)-g\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R}{\left|Re^{it}-z\right|^2}dt+\|g'\|\le$$

$$\le\|f(R\cdot)-g\|\frac{1}{R-|z|}+\|g'\|.$$

Следовательно $\left(R-|z|\right)|f'(z)|\le\|f(R\cdot)-g\|+\left(1-|z|\right)\|g'\|.$

Поскольку функция g является произвольной, то последнее неравенство значит, что

$$\left(R-|z|\right)|f'(z)|\le K\left(1-|z|,\ f_R\right), \tag{3}$$

где $f_R(z):=f(Rz).$

Известно (например, [4, с. 177]), что для произвольной функции $F\in A(\overline{D})$

$$K(\delta,F)\le C\omega(\delta,F),\quad \delta>0,$$

где C – абсолютная константа и $\omega(\delta,F):=\sup\limits_{|t\le\delta|}\left|F(\cdot e^{it})-F(\cdot)\right|$ – модуль непрерывности функции $F.$ Поэтому, сочетая этот факт с (3), а также учитывая определение величины $|f|_{Lip_\lambda}$ и монотонность функции $\lambda,$ получим

$$\left(R-|z|\right)|f'(z)|\le C\omega\left(1-|z|,\ f_R\right)=$$

$$=C\sup_{|t|\le1-|z|}\left\|f(R\,e^{it}\cdot)-f(R\cdot)\right\|_{C(T)}\le C|f|_{Lip_\lambda}\sup_{|t|\le1-|z|}\lambda\left(R\left|e^{it}-1\right|\right)=$$

$$=C|f|_{Lip_\lambda}\sup_{|t|\le1-|z|}\lambda\left(2R\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right)\le C|f|_{Lip_\lambda}\,\lambda\left(R\left(1-|z|\right)\right).$$

Переходя к пределу при $R\to1-,$ получим $\dfrac{1-|z|}{\lambda(1-|z|)}|f'(z)|\le C|f|_{Lip_\lambda}<\infty\quad z\in D,$

а это значит, что $f\in\mathfrak{B}_\lambda^1.$

Для доказательства остальных вложений в (2) достаточно показать, что $\mathfrak{B}_\lambda^1\subset\mathfrak{B}_\lambda^2.$ Для этого воспользуемся формулой:

$$f''(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma|=R}\frac{f'(\varsigma)}{\left(\varsigma-z\right)^2}d\varsigma,\quad |z|<R<1.$$

Получаем

$$|f''(z)|\le\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f'\left(R\,e^{i\theta}\right)\right|}{\left|R\,e^{i\theta}-z\right|^2}d\theta\le$$

$$\le|f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1}\frac{\lambda\left(1-R\right)}{1-R}\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{R^2-2R|z|\cos\theta-|z|^2}=$$

$$=|f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1}\frac{\lambda\left(1-R\right)}{1-R}\frac{R}{R^2-|z|^2}\le|f|_{\mathfrak{B}_\lambda^1}\frac{\lambda\left(1-R\right)}{1-R}\frac{1}{R-|z|}.$$

Положим теперь $R=\dfrac{1+|z|}{2}.$ Тогда из предыдущей оценки следует соотношение

$$\left|f\right|_{\mathfrak{B}_\lambda^2} = \sup_{z\in D}\frac{\left(1-|z|\right)^2}{\lambda\left(1-|z|\right)}\left|f''(z)\right| \le 4\left|f\right|_{\mathfrak{B}_\lambda^1}\sup_{z\in D}\frac{\lambda\left(\frac{1-|z|}{2}\right)}{\lambda\left(1-|z|\right)} \le 4\left|f\right|_{\mathfrak{B}_\lambda^1},$$

которое и требовалось доказать.
Вложения $\mathfrak{B}_\lambda^k \subset \mathfrak{B}_\lambda^{k+1}$, $k\ge 2$, следуют из доказанного с помощью подстановки $f' := f^k$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $\lambda : R_+ \to R_+$ – непрерывная неубывающая функция, $\lambda(t)>0,\ t>0,\quad \lambda(0)=0.$ Тогда:

1) $\int\limits_0^x \frac{\lambda(t)}{t}dt = O(1)\lambda(x),\ x>0 \Rightarrow ALip_\lambda\left(\overline{D}\right)\supset \mathfrak{B}_\lambda^1;$

2) если $k\in N$, то $\int\limits_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = O(1)\frac{\lambda(x)}{x^k},\ 0<x<1 \ \Rightarrow\ \mathfrak{B}_\lambda^k \supset \mathfrak{B}_\lambda^{k+1};$

3) $\int\limits_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^2}dt = O(1)\frac{\lambda(x)}{x},\ 0<x<1 \ \Rightarrow\ \mathfrak{B}_\lambda^1 \supset \mathfrak{B}_\lambda^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_\lambda^k \supset \ldots$

Доказательство. Утверждение пункта 1) является непосредственным следствием теоремы Я.Л. Геронимуса [5, теорема 4].

Докажем теперь пункт 2). Прежде всего отметим, что при условии

$$\int\limits_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = O(1)\frac{\lambda(x)}{x^k},\ 0<x<1, \tag{4}$$

для функции λ имеет место неравенство

$$\liminf_{t\to 0+}\frac{\lambda(t)}{t^k} > 0. \tag{5}$$

Пускай теперь $f\in\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}$. Исходя из равенства

$$f^{(k)}(z) = \int\limits_0^z f^{(k+1)}(\varsigma)d\varsigma + f^{(k)}(0),\quad z\in D,$$

где интегрирование ведётся вдоль отрезка, который соединяет точки 0 и z, на основании условия (4) получаем оценку

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \le \int\limits_0^{|z|}\left|f^{(k+1)}(\varsigma)\right|d\varsigma + \left|f^{(k)}(0)\right| \le$$

$$\le \left|f\right|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}}\int\limits_0^{|z|}\frac{\lambda(1-\varsigma)}{(1-\varsigma)^{k+1}}d\varsigma + \left|f^{(k)}(0)\right| =$$

$$= O(1)\left|f\right|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}}\frac{\lambda(1-|z|)}{(1-|z|)^k} + \left|f^{(k)}(0)\right|.$$

Отсюда, учитывая (5), получаем соотношение

$$\frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)}\left|f^{(k)}(z)\right| < O(1)\left|f\right|_{\mathfrak{B}_\lambda^{k+1}} + \left|f^{(k)}(0)\right|\frac{(1-|z|)^k}{\lambda(1-|z|)} < \infty,$$

которое и доказывает, что $f\in\mathfrak{B}_\lambda^k$.

Чтобы доказать пункт 3), отметим, что условие (4), как показано в [6], равносильно такому: $\exists C>1:\ \limsup_{t\to 0+}\frac{\lambda(Ct)}{\lambda(t)} < C^k.$

Следовательно, если выполняется условие (4) при $k=1,$ то существует постоянная $C>1$, такая, что $\limsup\limits_{t\to 0}\dfrac{\lambda(Ct)}{\lambda(t)}<C<C^2<C^3<...<C^k...,$ т.е. условие (4) выполняется для каждого натурального k. Этот факт на основании уже доказанного пункта 2) доказывает пункт 3).

Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 получаем

Следствие. Пусть $\lambda: R_+\to R_+ -$ непрерывная неубывающая функция, $\lambda(t)>0,\ t>0,\quad \lambda(0)=0.$ Если выполняется условие

$$\int\limits_0^x \frac{\lambda(t)}{t}dt + x\int\limits_x^1 \frac{\lambda(t)}{t^2}dt = O(1)\lambda(x),\ \ 0<x<1,$$

то $ALip_\lambda\left(\overline{D}\right)=ALip_\lambda\left(D\right)=\mathfrak{B}_\lambda^1=\mathfrak{B}_\lambda^2=\ldots=\mathfrak{B}_\lambda^k=\ldots$

Замечание 3. Последнее утверждение характеризирует классы $\mathfrak{B}_\lambda^k$ в терминах модуля непрерывности первого порядка. Характеристики классов $\mathfrak{B}_\lambda^k$ в терминах модулей непрерывности высших порядков получены в работах [7–9].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy, G. Some properties of fractional integrals. II / G. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Zeitschr. – 1931. – Vol. 34. – P. 403–439.
2. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск, 1987. – 688 с.
3. Брудный, Ю. А. Обобщение одной теоремы Харди и Литтлвуда / Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз // Матем. сб. – 1960. – Т. 52, № 3. – С. 891–894.
4. DeVore, R. A. Constructive Approximation / R. A. DeVore, G. G. Lorentz. – Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1993. – 462 p.
5. Геронимус, Я. Л. О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе / Я. Л. Геронимус // Матем. сб. – 1956. – Т. 38, № 3. – С. 319–330.
6. Бари, Н. К. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций / Н. К. Бари, С. Б. Стечкин // Тр. Моск. мат. о–ва. – 1956. – Т. 5 – С. 483–522.
7. Zygmund, A. Smooth functions / A. Zygmund // Duke Mathematics Jourlal. – 1945. – Vol. 12. – P. 47–76.
8. Ковальчук, Р. Н. О некоторых свойствах интегрального модуля гладкости граничной функции класса $H_p(p\ge 1)$ /Р. Н. Ковальчук // Теор. функций, функционал. анализ и их приложения. – 1969. – Т. 9. – С. 14–20.
9. Kryakin, Y. q-Moduli of Continuity in $H_p(D)$, p > 0, and an Inequality of Hardy and Littlewood / Y. Kryakin, W. Trebels // Journal Approx. Theory. – 2002. – Vol. 115. – P. 238–259.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 09.04.2015

Piddubny O.M. **Classes of Analytic Functions in the Unit Disk of the Complex Plane**

In this paper we researched classes of analytic functions in the unit disc of the complex plane. Conditions are found investments considered classes.