

УДК 517.944:532.546

**Б.П. Довгий<sup>1</sup>, Е.С. Вакал<sup>2</sup>, Ю.Е. Вакал<sup>3</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математической физики

Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математической физики

Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, ассистент каф. вычислительной математики

Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ КВАЗИНЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА**

*Рассмотрена задача нелинейной оптики о распространении волн с учетом дифракции и неоднородностей среды при условии медленного изменения комплексной амплитуды волны. Математическая модель сформулирована в виде краевой задачи для квазинелинейного уравнения типа Шредингера в цилиндрической области при нелинейности определенного вида. Задача решена методом конечных разностей с использованием сходящегося метода последовательных приближений для системы консервативных разностных уравнений. Приведены численные расчеты для различных значений параметров задачи.*

**Введение**

При рассмотрении процесса распространения квазиплоских и квазимонохроматических волн используют приближенные уравнения, полученные из уравнений Максвелла. Для распространяющихся волновых пучков с учетом дифракции, а также неоднородностей среды, при условии медленного изменения комплексной амплитуды приходят к уравнению или системе уравнений типа Шредингера. Именно таким образом при исследовании нелинейных явлений формулируют математические модели ряда прикладных задач нелинейной оптики [1–6].

В данной статье рассмотрено численное решение краевой задачи для квазинелинейного уравнения типа Шредингера в цилиндрической области при условии, что нелинейность обладает определенным свойством.

**Постановка задачи**

Пусть цилиндрическая область  $\bar{G} = [0, a] \times [0, Z]$  заполнена оптически нелинейной средой со слабой дисперсией и малым поглощением (здесь  $a$  – радиус цилиндра,  $Z$  – длина области). Рассмотрим процесс распространения квазиплоской монохроматической волны в указанной среде с учетом дифракционных эффектов и осевой симметрии. Медленно изменяющаяся комплексная амплитуда волны описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial z} = i dLu + f(u)u, \quad (r, z) \in G, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad r \in [0, a], \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\frac{\partial u(0, z)}{\partial r} = 0, \quad u(a, z) = 0, \quad z \in [0, Z], \quad (3)$$

где  $Lu = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ ,  $d > 0$ ,  $i$  – мнимая единица.

Процессы взаимодействия волны с нелинейной средой определяются функцией  $f(u)$ , обладающей свойством

$$(f(u))^* = -f(u). \quad (4)$$

Покажем, что при выполнении условия (4) для задачи (1) – (3) имеет место следующий закон сохранения

$$\|u(r, z)\|^2 = \|u_0(r)\|^2 \quad \forall z \in [0, Z], \quad (5)$$

где норма определяется по формуле

$$\|v(r)\|^2 = (v, v) = 2\pi \int_0^a r v(r) v^*(r) dr. \quad (6)$$

Действительно, умножим уравнение (1) на  $u^*(r, z)$ , а уравнение, сопряженное уравнению (1), – на  $u(r, z)$ . Сложим полученные равенства, умножим результат на  $2\pi r$  и проинтегрируем по  $r$ . В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{d}{dz} \|u(r, z)\|^2 = id[(Lu, u) - (u, Lu)].$$

Учитывая краевые условия (3) и самосопряженность оператора  $L$ , проведем интегрирование по  $z$  с учетом начального условия (2), в результате чего получим закон сохранения (5). Это соотношение, с физической точки зрения, говорит о неизменности энергетической характеристики – интенсивности волны (6), для произвольной точки направления распространения вдоль оси цилиндрической области.

### Численное решение задачи

Для получения приближенного решения задачи (1) – (5) используем конечно-разностный метод. Область  $\bar{G}$  заменим сеточной областью с равномерной сеткой  $\bar{\omega}_{h_r, h_z} = \bar{\omega}_{h_r} \times \bar{\omega}_{h_z}$ , где  $h_r, h_z$  – шаги сетки по  $r$  и  $z$  соответственно,

$$\bar{\omega}_{h_r} = \{r_k = (k - 0.5)h_r, k = \overline{1, N_r}, a = (N_r - 0.5)h_r\}, \quad \bar{\omega}_{h_z} = \{z_j = jh_z, j = \overline{0, N_z}, h_z > 0\}.$$

Используя интегро-интерполяционный метод [6], задаче (1) – (3) поставим в соответствие следующую однопараметрическую нелинейную разностную схему с весом  $\sigma$

$$y_{z,j} = id\Lambda Y_k + f(Y_k)Y_k, \quad k = \overline{1, N_r - 1}, \quad j = \overline{0, N_z - 1}, \quad (7)$$

$$y_k^0 = u_0(r_k), \quad k = \overline{1, N_r}, \quad (8)$$

$$y_{\bar{r},1}^{j+1} = 0, \quad y_{N_r}^{j+1} = 0, \quad j = \overline{0, N_z - 1}, \quad (9)$$

где

$$\Lambda Y_k = \frac{1}{r_k} (r_{k-0.5} Y_{\bar{r},k})_{r,k}, \quad Y_{\bar{r},k} = \frac{Y_k - Y_{k-1}}{h_r}, \quad Y_{r,k} = \frac{Y_{k+1} - Y_k}{h_r},$$

$$Y_k \equiv y_k^{(\sigma)} = \sigma y_k^{j+1} + (1 - \sigma) y_k^j \equiv 0.5(y_k^{j+1} + y_k^j) + (\sigma - 0.5)h_z y_{z,j}. \quad (10)$$

Несложно показать, что однопараметрическая схема (7) – (9) аппроксимирует дифференциальную задачу (1) – (3) с локальной погрешностью

$$\psi = O\left(\frac{h_r^2}{r} + h_z^p\right), \quad \text{где } p = \begin{cases} 2, & \sigma = 0.5, \\ 1, & 0.5 < \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Известно [7], что для однородного уравнения типа Шредингера схема с весами (7) устойчива при  $0.5 \leq \sigma \leq 1$ .

**Теорема 1.** Разностная схема (7) – (9) при  $\sigma = 0.5$  полностью консервативна и устойчива.

Доказательство теоремы 1. Умножим уравнение (7) на  $Y_k^*$ , а уравнение, сопряженное уравнению (7), – на  $Y_k$ , и сложим полученные равенства. Тогда

$$y_{z,j} Y_k^* + Y_k y_{z,j}^* = id (\Lambda Y_k \cdot Y_k^* - Y_k \cdot \Lambda Y_k^*).$$

Умножим это равенство на  $2\pi r_k h_r$ , просуммируем по  $k = \overline{1, N_r - 1}$ . С учетом краевых условий (9) получим

$$2\pi \sum_{k=1}^{N_r-1} (y_{z,j} Y_k^* + Y_k y_{z,j}^*) r_k h_r = 0.$$

Преобразуем это равенство с учетом (10). Находим:

$$2\pi \sum_{k=1}^{N_r-1} \left( |y_k|^2_{z,j} + (2\sigma - 1) h_z |y_{z,j}|^2 \right) r_k h_r = 0. \quad (11)$$

Введем сеточную норму для дискретной функции  $v_k$  по формуле

$$\|v_k\|_h^2 = 2\pi \sum_{k=1}^{N_r-1} |y_k|^2 r_k h_r. \quad (12)$$

В соотношении (11) положим  $\sigma = 0.5$ , далее умножим его на  $h_z$  и просуммируем по  $j = \overline{0, m - 1}$ . В результате получим:

$$\|y_k^m\|_h^2 = \|u_0(r_k)\|_h^2 \quad \forall m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Равенство (13) является разностным аналогом закона сохранения (5) и показывает, что в сеточной норме (12) разностная схема (7) – (9) безусловно устойчива при  $\sigma = 0.5$ .

Учитывая оценку для локальной погрешности и соотношение (13), несложно показать, что решение разностной задачи (7) – (9) сходится к решению дифференциальной задачи (1) – (3) в сеточной норме  $\|\cdot\|_h$  со скоростью  $O(h_z^2 + h_r^2 \sqrt{\ln(h_r^{-1})})$ .

Для решения нелинейной разностной задачи (7) – (9) на слое  $j + 1$  будем использовать итерационный метод последовательных приближений [6]:

$$\frac{\hat{y}_k^{(s)} - y_k}{h_z} = D \left( \Lambda \hat{y}_k^{(s)} + \Lambda y_k \right) + f \left( Y_k^{(s-1)} \right) Y_k^{(s-1)},$$

$$D = id / 2, \quad Y_k^{(s-1)} = 0.5 \left( \hat{y}_k^{(s-1)} + y_k \right), \quad \hat{y}_k \equiv y_k^{j+1}, \quad k = \overline{1, N_r - 1}, \quad (14)$$

$$\hat{y}_{\bar{r},1}^{(s)} = 0, \quad \hat{y}_{N_r}^{(s)} = 0, \quad s = 0, 1, \dots,$$

$$\hat{y}_k^{(0)} = y_k^j, \quad k = \overline{1, N_r},$$

с условием окончания  $\left( \max_k \left| \hat{y}_k^{(s)} - \hat{y}_k^{(s-1)} \right| \leq \varepsilon \right) \vee (s > S_{\max})$ , где  $\varepsilon > 0$  – заданная точность,

$S_{\max}$  – максимальное число итераций.

На каждом шаге  $s$  процесса (14) система линейных уравнений решается устойчивым методом монотонной прогонки с комплекснозначными коэффициентами.

Для реализации полученных алгоритмов разработано программное обеспечение с использованием системы компьютерной математики MATLAB [8].

### Результаты численных расчетов

Для иллюстрации эффективности разработанных алгоритмов применим их к решению некоторой прикладной задачи нелинейной оптики. С этой целью исследуем влияние дифракционного параметра  $d$  на распространение волны в нелинейной среде,

которая моделируется функцией  $f(u) = \frac{i\gamma|u|^2}{\alpha + \beta|u|^2}$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ), а на входе в нелинейную

среду задается плоский гауссов пучок  $u_0(r) = A \exp(-Br^2)$ .

Рассмотрим следующие варианты:  $d = 0.005, d = 0.05, d = 0.5$  при  $\gamma = 0.3$ ,  $\alpha, \beta = 1, A = 1.7 + 1i, B = 50, a = 1, N_r = 100, h_z = 0.01, Z = 20, \varepsilon = 10^{-8}, S_{\max} = 2 \cdot 10^4$ .

На рисунках 1–3 приведены результаты расчета в виде графиков распределения  $|u(r, z)|$  для  $z = 0, Z/2, Z$  при  $d = 0.005, 0.05, 0.5$ . На рисунке 4 представлена зависимость от  $d$  величины  $|u(r, Z)|$ . На рисунке 5 представлена зависимость  $|u(r, z)|$  при  $d = 0.005$ . Изменение энергетической характеристики решения (12) вдоль оси  $z$  при  $d = 0.005$  по отношению к значению  $\|u_0(r_k)\|_h^2$  показано на рисунке 6.

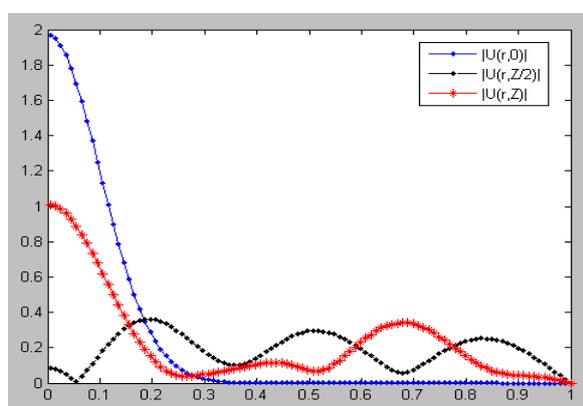


Рисунок 1.

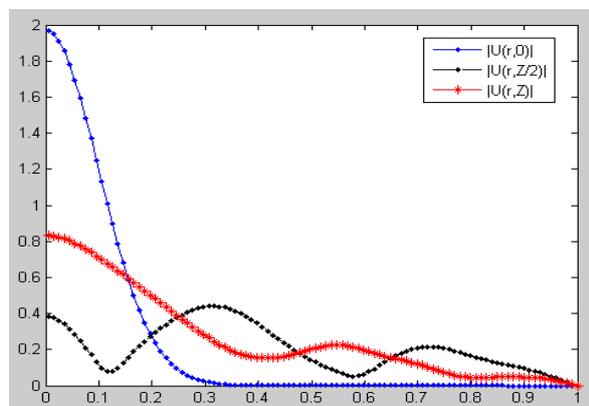


Рисунок 2.

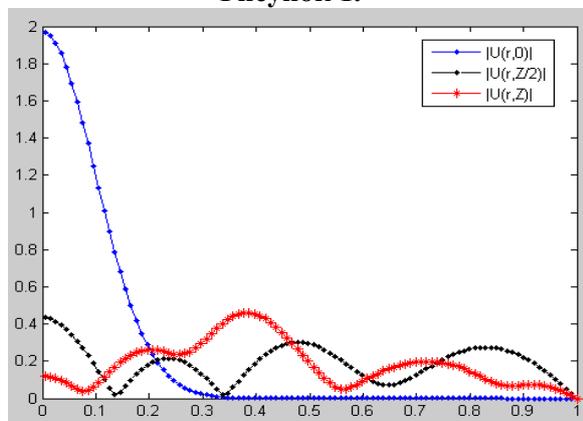


Рисунок 3.

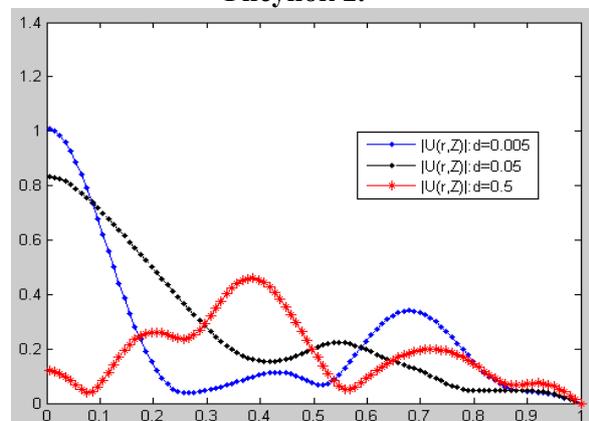


Рисунок 4.

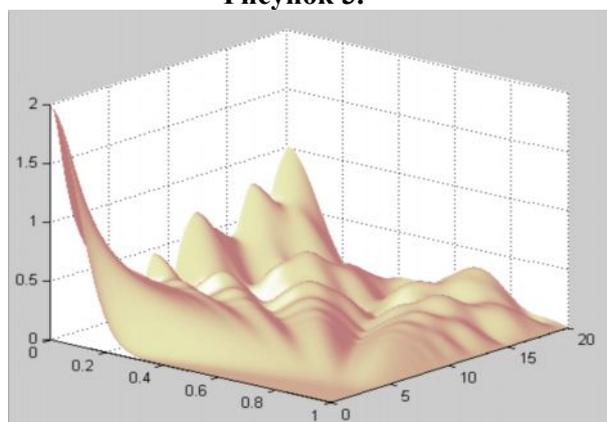


Рисунок 5.

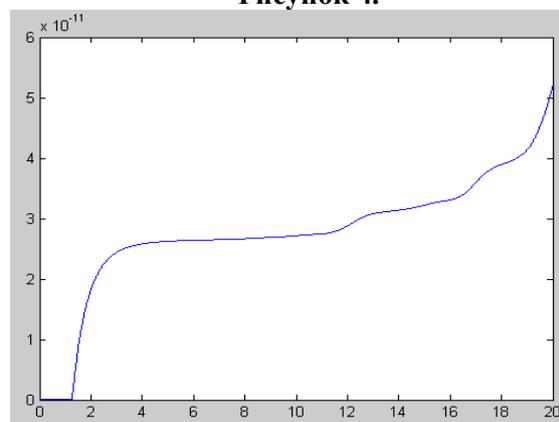


Рисунок 6.

### Заклучение

Полученные в работе результаты соответствуют характерному поведению решения дифференциальной задачи, а выполнение закона сохранения с точностью не хуже погрешности аппроксимации свидетельствует о практической надежности предложенной методики для решения такого класса задач. Использованное в данной работе программное обеспечение на основе системы компьютерной математики MATLAB [8] может быть применено (с соответствующей модификацией) для получения численных решений других краевых задач математической физики, в которых имеют место законы сохранения, например, для системы уравнений распространения импульса в двухуровневой среде без диссипации, почти периодические и солитонные решения которой получены в [9].

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов, С. А. Проблемы нелинейной оптики. 1961–1963. (Электромагнитные волны в нелинейных диспергирующих средах) / С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. – М. : ВИНТИ, 1965. – 298 с.
2. Луговой, В. И. Теория распространения мощного лазерного излучения в нелинейной среде / В. И. Луговой, А. М. Прохоров // Успехи физ. наук. – 1973. – Т. 111, вып. 2. – С. 203–247.
3. Насибов, Ш. М. Об одном нелинейном уравнении типа Шредингера / Ш. М. Насибов // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 4. – С. 660–670.
4. Gajewski, H. On an Initial-Boundary Value Problem for the Nonlinear Schrödinger Equation / H. Gajewski // Int. J. Math. Math. Sc. – 1979. – VI. 2, № 3. – P. 503–531.
5. Довгий, Б. П. Математические модели внутрирезонаторного преобразования частот в нелинейной оптике и их реализация на ЭВМ / Б. П. Довгий // Вычисл. и приклад. математика. – 1990. – Вып. 70. – С. 61–67.
6. Боголюбов, Н. Н. (мл.). Обратная периодическая задача для дискретного приближения нелинейного уравнения Шредингера / Н. Н. Боголюбов, А. К. Прикарпатский // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 262, № 5. – С. 1103–1108.
7. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
8. Применение математического пакета MATLAB для решения прикладных задач : учеб. пособие / Е. С. Вакал [и др.]. – Киев : Украин. фитосоциоцентр, 2012. – 78 с.
9. Боголюбов, Н. Н. (мл.). Точные почти периодические и солитонные решения нелинейных уравнений распространения волнового импульса в двухуровневой среде без диссипации / Н. Н. Боголюбов, А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 4. – С. 5–9.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 08.06.2016

### **Dovgiy B.P., Vakal E.S., Vakal Y.E. Numerical Solution of the Axisymmetric Boundary Value Problem for Quasi Nonlinear Schrödinger-Type Equation**

*A nonlinear optics problem on wave propagation taking into account diffraction and medium heterogeneity under condition of slow change of the complex wave amplitude is considered. The mathematical model is formulated as a boundary value problem for quasi nonlinear Schrödinger-type equation in a cylindrical domain with a certain type of nonlinearity. The problem is solved by the finite difference method using convergent successive approximations method for systems of conservative difference equations. Numerical calculations for different values parameters of the problem are given.*