УДК 539.12

А.М. Ишханян[1], О. Флореа[2], Е.М. Овсиюк[3], В.М. Редьков[4]

[1]д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент НАН Армении, зав. лабораторией Ин-та физических исследований НАН Армении

[2]д-р мат., доц. фак-та алгебры, геометрии и дифференциальных уравнений Трансильванского университета (г. Брашев, Румыния)

[3]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного педагогического университета имени И.П. Шамякина

[4]д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теоретической физики Ин-та физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси

ЧАСТИЦА ДИРАКА – КЭЛЕРА В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА: БОЗОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Построены точные решения уравнения Дирака – Кэлера в случае пространства Римана постоянной положительной кривизны. Для случая минимального значения сохраняющегося углового момента, $j = 0$*, радиальные уравнения приведены к уравнениям второго порядка, которые решаются в терминах гипергеометрических функций. В случае ненулевых значений углового момента* $j = 1, 2, 3, \ldots$*, радиальные уравнения сводятся к двум сложным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации построено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальные решения, последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Найденный спектр энергии существенно отличается от спектра энергии обычной дираковской частицы в сферическом пространстве Римана.*

Введение

Понятие об элементарных частицах как неких релятивистски инвариантных объектах в рамках 4-мерного пространства-времени Минковского является надежно установленным и общепризнанным. Для любой частицы предполагаются заданными определенные трансформационные свойства отвечающей ей полевой функции и связанное с этими свойствами релятивистское волновое уравнение. Интересной проблемой, притягивающей долгое время пристальное внимание, является волновое уравнение для частицы Дирака – Кэлера. Этому вопросу посвящена обширная литература [1–33]. Анализ этого вопроса начался уже в ранний период развития теории квантово-механических волновых уравнений сразу же после открытия уравнения Дирака [1]. Фактически уравнение Дирака – Кэлера было получено еще в 1928–1929 гг. Дарвином [2], а также Иваненко и Ландау [3] как альтернатива уравнению Дирака. Основным мотивом при этом было стремление построить уравнение для частицы со спином 1/2 на основе тензорных величин без использования спиноров, последние казались тогда мистическими и непонятными в сравнении с более знакомыми тензорными объектами. Поле Дирака – Кэлера состоит из набора тензоров, эквивалентных биспинору второго ранга. Оно содержит 16 независимых компонент, и волновое уравнение для него может быть представлено как формально несвязанные друг с другом четыре уравнения дираковского вида. Главная особенность в понимании тогда этого поля заключалась в том, что оно давало возможность осуществить плавный переход от тензоров к спинорам. В определенном смысле это была попытка устранения спиноров вообще, тем не менее сохранив связь с дираковским фермионом.

Однако упомянутая несвязанность четырех уравнений Дирака, используемых в теории Дирака – Кэлера, имеет место только в случае плоского пространства-времени Минковского, и это свойство не сохраняется в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых с привлечением пространственно-временных моделей с неевклидовой геометрией. Таким образом, наиболее интересным является вопрос о физической интерпретации поля Дирака – Кэлера: является ли это поле сложным (составным) бозоном или же эта система эквивалентна набору из четырех фермионов.

1. Постановка задачи

В пространстве Минковского частица Дирака – Кэлера описывается 16-компонентной волновой функцией $U(x)$, биспинором второго ранга, или эквивалентным набором тензорных полей: $\{\Phi(x),\Phi_i(x),\tilde{\Phi}(x),\tilde{\Phi}_i(x),\Phi_{mn}(x)\}$, где $\Phi(x)$ – скаляр, $\Phi_i(x)$ – вектор, $\tilde{\Phi}(x)$ – псевдоскаляр, $\tilde{\Phi}_i(x)$ – псевдовектор, $\Phi_{mn}(x)$ – антисимметричный тензор. Связь между этими величинами задается соотношением

$$U = \left(-i\Phi + \gamma^l \Phi_l + i\sigma^{mn}\Phi_{mn} + \gamma^5\tilde{\Phi} + i\,\gamma^l\gamma^5\,\tilde{\Phi}_l\right)E^{-1}\,, \qquad (1.1)$$

где $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)$ и E – биспинорная метрическая матрица [33]. В искривленном пространстве общековариантное уравнение Дирака – Кэлера в 4-спинорной форме имеет вид:

$$[\, i\gamma^\alpha(x)\,(\partial/\partial x^\alpha + B_\alpha(x)) - m\,]\,U(x) = 0\,, \qquad (1.2)$$

где B_α – 2-биспинорная связность, $B_\alpha = \frac{1}{2}J^{ab}e^\beta_{(a)}\nabla_\alpha(e_{(b)\beta})$, $J^{ab} = \sigma^{ab}\otimes I + I\otimes\sigma^{ab}$ – генераторы тензора второго ранга относительно группы Лоренца. Это спинорное уравнение эквивалентно системе тензорных уравнений [33]:

$$\nabla^\alpha\Psi_\alpha + m\Psi = 0\,, \qquad \nabla^\alpha\tilde{\Psi}_\alpha + m\tilde{\Psi} = 0\,,$$

$$\nabla_\alpha\Psi + \nabla^\beta\Psi_{\alpha\beta} - m\Psi_\alpha = 0\,,$$

$$\nabla_\alpha\tilde{\Psi} - \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha^{\ \beta\rho\sigma}(x)\nabla_\beta\Psi_{\rho\sigma} - m\tilde{\Psi}_\alpha = 0\,,$$

$$\nabla_\alpha\Psi_\beta - \nabla_\beta\Psi_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}^{\ \ \rho\sigma}(x)\nabla_\rho\tilde{\Psi}_\sigma - m\Psi_{\alpha\beta} = 0\,. \qquad (1.3)$$

Ковариантные тензорные полевые переменные связаны локальными тетрадными переменными соотношениями

$$\Psi_\alpha = e^{(i)}_\alpha\Psi_i\,, \quad \tilde{\Psi}_\alpha = e^{(i)}_\alpha\tilde{\Psi}_i\,, \quad \Psi_{\alpha\beta} = e^{(m)}_\alpha e^{(n)}_\beta\Psi_{mn}\,, \qquad (1.4)$$

Леви-Чивита тензор определяется равенством $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) = \varepsilon^{abcd}e^\alpha_{(a)}e^\beta_{(b)}e^\rho_{(c)}e^\sigma_{(d)}$.

Большая часть имеющихся работ по теории поля Дирака – Кэлера посвящена в основном исследованию свойств симметрии и других фундаментальных связей с обычными полями Дирака [1–33], однако фактически нет каких-либо нетривиальных рассмотрений вопроса о решениях уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства с неевклидовой геометрией.

В настоящей работе мы строим точное общее решение для уравнения Дирака – Кэлера в случае простейшей неевклидовой геометрической модели – сферического риманова пространства постоянной положительной кривизны. Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента, $j = 0$, радиальные уравнения приведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые решаются в терминах гипергеометрических функций. В случае ненулевых значений углового момента $j = 1, 2, 3, ...,$ радиальные уравнения сводятся к двум уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации построено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения, последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Дискретные уровни энергии получены наложением требования квази-полиномиальности волновых функций. Найденный спектр энергии существенно отличается от спектра энергии обычной дираковской частицы в сферическом пространстве Римана. Ни один из найденных уровней энергии не совпадает с уровнями энергии для обычной частицы Дирака в сферическом пространстве Римана. Все это указывает на невозможность фермионной интерпретации поля Дирака – Кэлера как поля, эквивалентного четырем полям Дирака.

2. Разделение переменных

Изложим кратно результаты по разделению переменных в уравнении Дирака – Кэлера в пространствах Минковского и Римана. Запишем уравнение Дирака в пространстве Минковского [33] в базисе сферической тетрады:

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i\left(\gamma^3 \partial_r + \frac{\gamma^1 J^{31} + \gamma^2 J^{32}}{r} \right) + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta,\phi} - m \right] U(x) = 0 , \qquad (2.1)$$

$$\Sigma_{\theta,\phi} = i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + iJ^{12} \cos\theta}{\sin\theta}, \qquad J^{12} = (\sigma^{12} \otimes I + I \otimes \sigma^{12}) . \qquad (2.2)$$

Диагонализируя оператор общего углового момента

$$J_1 = l_1 + \frac{iJ^{12} \cos\phi}{\sin\theta},\ J_2 = l_2 + \frac{iJ^{12} \sin\phi}{\sin\theta},\ J_3 = l_3 , \qquad (2.3)$$

для функции Дирака – Кэлера, получаем следующую общую подстановку:

$$U_{\varepsilon jm}(t,r,\theta,\phi) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_{11} D_{-1} & f_{12} D_0 & f_{13} D_{-1} & f_{14} D_0 \\ f_{21} D_0 & f_{22} D_{+1} & f_{23} D_0 & f_{24} D_{+1} \\ f_{31} D_{-1} & f_{32} D_0 & f_{33} D_{-1} & f_{34} D_0 \\ f_{41} D_0 & f_{42} D_{+1} & f_{43} D_0 & f_{44} D_{+1} \end{vmatrix}, \qquad (2.4)$$

где $f_{ab} = f_{ab}(r)$, $D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$ – функции Вигнера [35], квантовое число j принимает значения $0, 1, 2, \ldots$. Следующий шаг, существенно упрощающий систему радиальных уравнений, состоит в диагонализации оператора пространственной инверсии. В сферическом тетрадном базисе этот оператор задается выражением

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P} . \qquad (2.5)$$

Уравнение на собственные значения $\hat{\Pi} U_{\varepsilon jm} = \Pi\, U_{\varepsilon jm}$ накладывает ограничения:

$$f_{31} = \pm f_{24} ,\ f_{32} = \pm f_{23} ,\ f_{33} = \pm f_{22} ,\ f_{34} = \pm f_{21} ,$$
$$f_{41} = \pm f_{14} ,\ f_{42} = \pm f_{13} ,\ f_{43} = \pm f_{12} ,\ f_{44} = \pm f_{11} , \qquad (2.6)$$

где верхний знак относится к собственному значению $\Pi = (-1)^{j+1}$, нижний знак относится к $\Pi = (-1)^j$. Уравнение (2.4) переписывается как

$$U_{\varepsilon jm\delta}(t,r,\theta,\phi) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_{11} D_{-1} & f_{12} D_0 & f_{13} D_{-1} & f_{14} D_0 \\ f_{21} D_0 & f_{22} D_{+1} & f_{23} D_0 & f_{24} D_{+1} \\ \delta f_{24} D_{-1} & \delta f_{23} D_0 & \delta f_{22} D_{-1} & \delta f_{21} D_0 \\ \delta f_{14} D_0 & \delta f_{13} D_{+1} & \delta f_{12} D_0 & \delta f_{11} D_{+1} \end{vmatrix}, \qquad (2.7)$$

где $\delta = +1$ относится к случаю $\Pi = (-1)^j$, $\delta = -1$ – к случаю $\Pi = (-1)^{j+1}$.

Система радиальных уравнений для $\delta = +1$ имеет вид:

$$\varepsilon f_{24} - i\frac{d}{dr} f_{24} + \frac{i}{r} 0 - \frac{ia}{r} f_{14} - m f_{11} = 0 , \quad \varepsilon f_{23} - i\frac{d}{dr} f_{23} - \frac{i}{r} f_{14} - \frac{ia}{r} f_{13} - m f_{12} = 0 ,$$

$$\varepsilon f_{14} + i\frac{d}{dr} f_{14} + \frac{i}{r} f_{23} + \frac{ia}{r} f_{24} - m f_{21} = 0 , \quad \varepsilon f_{13} + i\frac{d}{dr} f_{13} + \frac{i}{r} 0 + \frac{ia}{r} f_{23} - m f_{22} = 0 ,$$

$$\varepsilon f_{22} - i\frac{d}{dr} f_{22} + \frac{i}{r} 0 - \frac{ia}{r} f_{12} - m f_{13} = 0 , \quad \varepsilon f_{21} - i\frac{d}{dr_{21}} - \frac{i}{r} f_{12} - \frac{ia}{r} f_{11} - m f_{14} = 0 ,$$

$$\varepsilon f_{12} + i\frac{d}{dr} f_{12} + \frac{i}{r} f_{21} + \frac{ia}{r} f_{22} - m f_{23} = 0, \quad \varepsilon f_{11} + i\frac{d}{dr} f_{11} + \frac{i}{r} 0 + \frac{ia}{r} f_{21} - m f_{24} = 0. \quad (2.8)$$

Набор уравнений для случая $\delta = -1$ следует из приведенной формальной замены $m \to -m$. Вводя обозначения

$$A = (f_{11} + f_{22}) , \quad iB = (f_{11} - f_{22}) , \quad C = (f_{12} + f_{21}) , \quad iD = (f_{12} - f_{21}) ,$$

$$K = (f_{13} + f_{24}) , \qquad iL = (f_{13} - f_{24}) , \quad M = (f_{14} + f_{23}) , \qquad iN = (f_{14} - f_{23}) , \qquad (2.9)$$

уравнения (2.8) приводим к виду без комплексных коэффициентов:

$$\varepsilon K - \frac{dL}{dr} + \frac{a}{r} N - mA = 0 , \quad \varepsilon A - \frac{dB}{dr} + \frac{a}{r} D - mK = 0 ,$$

$$\varepsilon L + \frac{dK}{dr} + \frac{a}{r} M + mB = 0 , \quad \varepsilon B + \frac{dA}{dr} + \frac{a}{r} C + mL = 0 ,$$

$$\varepsilon M - \frac{dN}{dr} + \frac{1}{r} N + \frac{a}{r} L - mC = 0 , \quad \varepsilon C - \frac{dD}{dr} + \frac{1}{r} D + \frac{a}{r} B - mM = 0 ,$$

$$\varepsilon N + \frac{dM}{dr} + \frac{1}{r} M + \frac{a}{r} K + mD = 0 , \quad \varepsilon D + \frac{dC}{dr} + \frac{1}{r} C + \frac{a}{r} A + mN = 0 . \qquad (2.10)$$

Эти уравнения допускают наложение следующих линейных ограничений:

$$A = \lambda\, K , \ B = \lambda\, L , \ C = \lambda\, M , \ D = \lambda\, N , \qquad (2.11)$$

где $\lambda = \pm 1$. Для случая $\lambda = +1$ вместо (2.10) получаем четыре уравнения:

$$\frac{dK}{dr} + \frac{a}{r} M + (\varepsilon + m) L = 0 , \quad \frac{dL}{dr} - \frac{a}{r} N - (\varepsilon - m) K = 0 ,$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) M + \frac{a}{r} K + (\varepsilon + m) N = 0 , \quad \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right) N - \frac{a}{r} L - (\varepsilon - m) M = 0 . \qquad (2.12)$$

Если здесь m заменить на $-m$, то получим набор уравнений, соответствующий случаю $\lambda = -1$.

Уравнения (2.12) могут быть упрощены дальше наложением определенных линейных ограничений:

$$(i) \ \sqrt{j+1}\, K(r) = f(r) \ , \sqrt{j+1}\ L(r) = g(r) \ ,$$

$$\sqrt{j}\ M(r) = f(r) , \sqrt{j}\ N(r) = g(r) ,$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right) f + (\varepsilon + m) g = 0 , \quad \left(\frac{d}{dr} - \frac{j+1}{r}\right) g - (\varepsilon - m) f = 0 ; \qquad (2.13)$$

$$(ii) \ \sqrt{j}\ K(r) = f(r), \quad \sqrt{j}\ L(r) = g(r) ,$$

$$\sqrt{j+1}\, M(r) = -f(r) , \quad \sqrt{j+1}\, N(r) = -g(r) ,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right) f + (\varepsilon + m) g = 0 , \quad \left(\frac{d}{dr} + \frac{j}{r}\right) g - (\varepsilon - m) f = 0 . \qquad (2.14)$$

Полученные уравнения применимы для случаев ненулевого j. Случай $j = 0$ требует отдельного рассмотрения, поскольку вигнеровские функции $D^{j}_{0,\pm 1}$ при $j = 0$

не имеют смысла. В этом случае начальная подстановка для волновой функции должна быть выбрана в более простом виде

$$U_{\varepsilon 00}(t,r)=\frac{e^{-i\varepsilon t}}{r}\begin{vmatrix}0 & f_{12} & 0 & f_{14}\\ f_{21} & 0 & f_{23} & 0\\ 0 & f_{32} & 0 & f_{34}\\ f_{41} & 0 & f_{43} & 0\end{vmatrix}. \qquad (2.15)$$

Оператор пространственной инверсии делит решения (2.15) на два класса:

$$\Pi=+1\ (\delta=+1),\quad f_{32}=+f_{23}\,,\ f_{34}=+f_{21}\,,\ f_{41}=+f_{14}\,,\ f_{43}=+f_{12}\,; \qquad (2.16)$$

$$\Pi=-1\ (\delta=-1),\quad f_{32}=-f_{23}\,,\ f_{34}=-f_{21}\,,\ f_{41}=-f_{14}\,,\ f_{43}=-f_{12}\,. \qquad (2.17)$$

Используя тождество $\Sigma_{\theta,\phi}\,U_{\varepsilon 00}=0$, получаем радиальную систему уравнений:

$$\varepsilon\, M-\frac{dN}{dr}+\frac{N}{r}-m\,C=0\,,\ \varepsilon\, N+\frac{dM}{dr}+\frac{M}{r}+m\,D=0\,,$$

$$\varepsilon\, C-\frac{dD}{dr}+\frac{D}{r}-m\,M=0\,,\ \varepsilon\, D+\frac{dC}{dr}+\frac{C}{r}-m\,N=0\,. \qquad (2.18)$$

Полученную систему можно упростить

$$C=+M\,,\quad D=+N\ (\lambda=+1),$$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)M+(\varepsilon+m)N=0\,,\qquad \left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)N-(\varepsilon-m)M=0\,; \qquad (2.19)$$

$$C=-M,\quad D=-N\ (\lambda=-1),$$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)M+(\varepsilon-m)N=0\,,\qquad \left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)N-(\varepsilon+m)M=0\,. \qquad (2.20)$$

Таким образом, в пространстве Минковского радиальные уравнения для частицы Дирака – Кэлера по сути сводятся к уравнениям того же вида, что и в теории обычных частиц Дирака. Однако такое упрощение возможно только в пространстве Минковского и невозможно в любом сферически симметричном пространстве с кривизной.

Вышеприведенный анализ легко распространяется (хотя и не полностью) на случай сферического пространства Римана. Метрика этой геометрической модели задается выражением

$$dS^2=dt^2-dr^2-\sin^2 r(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\,, \qquad (2.21)$$

уравнение Дирака – Кэлера имеет вид:

$$\left[\,i\gamma^0\,\partial_t+i\left(\gamma^3\,\partial_r+\frac{\gamma^1 J^{31}+\gamma^2 J^{32}}{\tan r}\right)+\frac{1}{\sin r}\,\Sigma_{\theta,\phi}-m\right]U(x)=0\,, \qquad (2.22)$$

квантовое число общего углового момента принимает значения $j=0,1,2,...$ Дальнейшие вычисления по разделению переменных в значительной степени совпадают с описанными в [33], различия появляются только в явном виде результирующих радиальных уравнений.

Для случая минимального $j=0$ задача сводится к системе:

$$\varepsilon\, M-\frac{dN}{dr}+\frac{N}{\tan r}-m\,C=0\,,\ \varepsilon\, N+\frac{dM}{dr}+\frac{M}{\tan r}+m\,D=0\,,$$

$$\varepsilon\, C-\frac{dD}{dr}+\frac{D}{\tan r}-m\,M=0\,,\ \varepsilon\, D+\frac{dC}{dr}+\frac{C}{\tan r}-m\,N=0\,; \qquad (2.23)$$

для больших значений $j=1,2,3,...$ задача сводится к более сложным уравнениям ($a=\sqrt{j(j+1)}$):

$$\frac{dK}{dr}+\frac{a}{\sin r}M+(\varepsilon+m)L=0\,,$$
$$\frac{dL}{dr}-\frac{a}{\sin r}N-(\varepsilon-m)K=0\,,$$
$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\tan r}\right)M+\frac{a}{\sin r}K+(\varepsilon+m)N=0\,,$$
$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{\tan r}\right)N-\frac{a}{\sin r}L-(\varepsilon-m)M=0\,. \qquad (2.24)$$

3. Случай минимального значения полного момента $j=0$

Для $j=0$ система (2.23) упрощается с использованием двух подстановок:

$C=+M\,,\quad D=+N\ (\lambda=+1),$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\tan r}\right)M+(\varepsilon+m)N=0\,,\quad \left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{\tan r}\right)N-(\varepsilon-m)M=0\,, \qquad (3.1)$$

$C=-M,\quad D=-N\ (\lambda=-1),$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{\tan r}\right)M+(\varepsilon-m)N=0\,,\quad \left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{\tan r}\right)N-(\varepsilon+m)M=0\,. \qquad (3.2)$$

Уравнения первого порядка (3.1) дают уравнения второго порядка для M и N:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\varepsilon^2-m^2-\frac{1+\cos^2 r}{\sin^2 r}\right)M=0, \qquad (3.3)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\varepsilon^2-m^2+1\right)N=0, \qquad N=\text{const}\ e^{\pm i\sqrt{\varepsilon^2-m^2+1}\,r}\,. \qquad (3.4)$$

Уравнение (3.3) решается в терминах гипергеометрических функций. Действительно, переходя к новой переменной $x=(1-\cos r)/2$, получим

$$x(1-x)\frac{d^2M}{dx^2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\frac{dM}{dx}+\left(\varepsilon^2-m^2+1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(1-x)}\right)M=0, \qquad (3.5)$$

далее с использованием подстановки $M(x)=x^A(1-x)^B F(x)$ при $A=-1/2,1;\ B=-1/2,1$ приходим к гипергеометрическому уравнению для $F(x)=F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ с параметрами

$$\alpha=2-\sqrt{\varepsilon^2-m^2+1},\quad \beta=2+\sqrt{\varepsilon^2-m^2+1},\quad \gamma=\frac{5}{2}. \qquad (3.6)$$

Чтобы получить решение, конечное в сферическом пространстве (напоминаем, что $r\in[0,\pi]$), следует использовать положительные значения $A=1$, $B=1$. Требование полиномиальности $\alpha=-n,\ \ n=0,1,2,...$ дает спектр энергии для состояний с $j=0$:

$$\varepsilon^2-m^2+1=(2+n)^2,\quad n=0,1,2,3,... \qquad (3.7)$$

Чтобы завершить анализ этого случая, следует определить относительный коэффициент между функциями $M(r)$ и $N(r)$:

$$N=N_0\sqrt{x(1-x)}\,F(-n-1,3+n;3/2;x),$$
$$M=M_0\,x(1-x)\,F(-n,4+n;5/2;x),\quad M_0/N_0=-(2/3)(\varepsilon-m). \qquad (3.8)$$

4. Анализ радиальных уравнений для $j=1,2,...$

С помощью первых двух уравнений системы (2.24) исключим функции L и N:

$$L=-\frac{1}{\varepsilon+m}\left(\frac{d}{dx}K+\frac{a}{\sin x}M\right),\quad N=-\frac{1}{\varepsilon+m}\left(\frac{d}{dx}M+\frac{1}{\tan x}M+\frac{a}{\sin x}K\right),\qquad (4.1)$$

в результате получим два уравнения второго порядка, связывающие функции K и M (используем обозначение $\varepsilon^2-m^2=p^2,\ \ p>0$):

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+p^2-\frac{a^2}{\sin^2 x}\right)K=\frac{2a\cos x}{\sin^2 x}M\,,\quad \left(\frac{d^2}{dx^2}+p^2+1-\frac{a^2+2}{\sin^2 x}\right)M=\frac{2a\cos x}{\sin^2 x}K\,.\qquad (4.2)$$

Уравнения (4.2) преобразуем к переменной $x=\cos^2 r$:

$$\left((1-x)4x\frac{d^2}{dx^2}+2(1-2x)\frac{d}{dx}+p^2-\frac{a^2}{1-x}\right)K=\frac{2a\sqrt{x}}{1-x}M\,,\qquad (4.3)$$

$$\left((1-x)4x\frac{d^2}{dx^2}+2(1-2x)\frac{d}{dx}+p^2+1-\frac{a^2+2}{1-x}\right)M=\frac{2a\sqrt{x}}{1-x}K\,.\qquad (4.4)$$

Около точки $x=1$ асимптотическое поведение решений задается формулами

$$M=M_0(1-x)^{\gamma}\,,\quad K=K_0(1-x)^{\gamma}\,;$$

при этом (4.3) и (4.4) дают алгебраическое уравнение

$$(4\gamma^2-2\gamma-a^2)K_0-2aM_0=0\,,\quad -2aK_0+(4\gamma^2-2\gamma-a^2-2)M_0=0\,.\qquad (4.5)$$

Отсюда находим четыре возможных значения для γ: $\gamma=j/2,\ \ (j+2)/2,\ \ (-j+1)/2,\ \ (-j-1)/2$. Только положительные значения $\gamma=j/2,\ \ (j+2)/2$ могут соответствовать связанным состояниям (т.е. конечным и непрерывным в сферическом пространстве функциям).

Исключая $M(x)$ из (4.3)–(4.4), найдем уравнение для функции $K(x)$:

$$x^2\frac{d^4K}{dx^4}+\left(7x+5-\frac{5}{1-x}\right)\frac{d^3K}{dx^3}+\left(10-\frac{1}{2}p^2+\frac{p^2+a^2-28}{2(1-x)}+\frac{15-2a^2}{4(1-x)^2}\right)\frac{d^2K}{dx^2}+$$

$$+\left(\frac{1}{4x}+\frac{3p^2-7}{4(1-x)}-\frac{3p^2+a^2-9}{4(1-x)^2}+\frac{a^2}{4(1-x)^3}\right)\frac{dK}{dx}+$$

$$+\left(\frac{p^2-a^2}{8x}+\frac{p^2-a^2}{8(1-x)}+\frac{p^4+2p^2-2a^2}{16(1-x)^2}-\frac{a^2(p^2-1)}{8(1-x)^3}+\frac{a^2(a^2-2)}{16(1-x)^4}\right)K=0.\qquad (4.6)$$

Аналогично, исключая $K(x)$, получим уравнение для $M(x)$:

$$x^2\frac{d^4M}{dx^4}+\left(7x+5-\frac{5}{1-x}\right)\frac{d^3M}{dx^3}+\left(10-\frac{1}{2}p^2+\frac{p^2+a^2-28}{2(1-x)}+\frac{15-2a^2}{4(1-x)^2}\right)\frac{d^2M}{dx^2}+$$

$$+\left(\frac{1}{4x}+\frac{3p^2-6}{4(1-x)}-\frac{3p^2+a^2-9}{4(1-x)^2}+\frac{a^2}{4(1-x)^3}\right)\frac{dM}{dx}+$$

$$+\left(\frac{p^2-a^2-1}{8x}+\frac{p^2-a^2-1}{8(1-x)}+\frac{p^4+2p^2-2a^2-3}{16(1-x)^2}-\frac{a^2(p^2-1)}{8(1-x)^3}+\frac{a^2(a^2-2)}{16(1-x)^4}\right)M=0.$$

5. Общее решение

Полученные сложные уравнения 4-го порядка можно решить, применив метод факторизации. Оба дифференциальных оператора 4-го порядка можно единственным способом разложить в произведения двух операторов первого порядка.

Уравнение (4.6) для $K(x)$ факторизуется следующим образом:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}-\frac{7}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{p^2-a^2-10}{x}+\frac{p^2-a^2-10}{1-x}-\frac{a^2-6}{(1-x)^2}\right)\right]f(x)=0, \quad (5.1)$$

где

$$f(x)\equiv\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{p^2-a^2}{x}+\frac{p^2-a^2}{1-x}-\frac{a^2}{(1-x)^2}\right)\right]K(x). \quad (5.2)$$

Можно построить некоторые решения $K(x)$, наложим требование $f(x)$=0. Делаем подстановку $K(x)=x^A(1-x)^B F(x)$:

$$A=0,\frac{1}{2}, \qquad B=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{4a^2+1}, \quad F(x)=F(\alpha,\beta;\gamma;x), \quad (5.3)$$

$$\alpha=A+B+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}, \quad \beta=A+B+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}, \quad \gamma=\frac{1}{2}+2A. \quad (5.4)$$

Каждая пара значений $(A,\ B)$ дает некоторое решение уравнения (4.6) в гипергеометрических функциях. Поскольку по физическим соображениям интересны конечные и непрерывные решения в точках $x=0$ и $x=1$, дальше анализируем только два следующих независимых решения уравнения (4.6), $K_1(x)$ и $K_2(x)$:

$$(i)\ A=\frac{1}{2}, \qquad B=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4a^2+1}=+\frac{j}{2}>0,$$

$$K_1=x^{1/2}(1-x)^{j/2}F\left(1+j/2-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1},1+j/2+\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1},3/2,x\right); \quad (5.5)$$

$$(ii)\ A=0, \qquad B=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{4a^2+1}=+\frac{j}{2}>0,$$

$$K_2=(1-x)^{j/2}F\left(j/2+1/2-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1},j/2+1/2+\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1},1/2,x\right). \quad (5.6)$$

Можно проверить, что если $K_1(x)$ и $K_2(x)$ подставить в уравнение (4.3), то в результате получим две независимые функции $M_1(x)$ и $M_2(x)$ соответственно, которые удовлетворяют уравнению (4.7) для $M(x)$.

В свою очередь, уравнение (4.7) для $M(x)$ факторизуется так:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}-\frac{7}{1-x}\right)\frac{d(x)}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{p^2-a^2-9}{x}+\frac{p^2-a^2-9}{1-x}-\frac{a^2-6}{(1-x)^2}\right)\right]g(x)=0, \quad (5.7)$$

где

$$g(x)=\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{p^2-a^2-1}{x}+\frac{p^2-a^2-1}{1-x}-\frac{a^2}{(1-x)^2}\right)\right]M(x). \quad (5.8)$$

Уравнение $g(x)=0$ также решается в гипергеометрических функциях. С использованием подстановки $M(x)=x^C(1-x)^D F(x)$ получаем:

$$C=0,\frac{1}{2}, \qquad D=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{4a^2+1}, \quad F(x)=F(\alpha',\beta';\gamma';x), \quad (5.9)$$

$$\alpha'=C+D+\frac{1}{2}-\frac{p}{2}, \qquad \beta'=C+D+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}, \qquad \gamma'=\frac{1}{2}+2C. \quad (5.10)$$

Только два выбора параметров ведут к конечным в точках $x=0,\ 1$ решениям:

$$C=1/2,\ D=+j/2,$$

$$M_3 = x^{1/2}(1-x)^{j/2} F\left(1+j/2-\frac{p}{2}, 1+j/2+\frac{p}{2}, 3/2, x\right), \tag{5.11}$$

$$(iv) \qquad C=0,\ D=+j/2,$$

$$M_4 = (1-x)^{j/2} F\left(j/2+1/2-\frac{p}{2}, j/2+1/2+\frac{p}{2}, 1/2, x\right). \tag{5.12}$$

Легко проверить, что, подставив $M_3(x)$ и $M_4(x)$ в уравнение (4.4), получим две независимых функции, соответственно $K_3(x)$ и $K_4(x)$, которые удовлетворяют уравнению (4.6) для $K(x)$. Затем можно убедиться, вычисляя вронскиан для четверки решений, что решения $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4$ являются линейно независимыми, и, следовательно, они образуют систему фундаментальных решений уравнения (4.6), т.е. дают общее решение задачи. Аналогично утверждение верно и для четверки решений $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$, дающих общее решение уравнения (4.7).

Накладывая требования полиномиальности решений (это достигается обрыванием гипергеометрических рядов до полиномов с помощью условия $\alpha=-n$), получаем явное описание четырех типов связанных состояний частицы Дирака – Кэлера в сферическом пространстве Римана:

$$(i) \quad p^2_{(1)} = (j+2+2n)^2-1, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$K_1(x) = \sqrt{x}\,(1-x)^{j/2}\, F(-n, j+2+n; 3/2; x),\ M_1(x), \tag{5.13}$$

$$(ii) \quad p^2_{(2)} = (j+1+2n)^2-1, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$K_2(x) = (1-x)^{j/2}\, F(-n, j+1+n; 1/2; x),\ M_2(x), \tag{5.14}$$

$$(iii) \quad p^2_{(3)} = (j+2n)^2, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$M_3(x) = \sqrt{x}\,(1-x)^{j/2}\, F(-n, j+2+n; 3/2; x), \tag{5.15}$$

$$(iv) \quad p^2_{(4)} = (j+1+2n)^2, \quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$M_4(x) = (1-x)^{j/2}\, F(-n, j+1+n; 1/2; x); \tag{5.16}$$

сопутствующие функции $M_1(x)$, $M_2(x)$ и $K_3(x)$, $K_4(x)$ задаются соотношениями:

$$(i)\ M_1(x) = \frac{(1-x)^{j/2}}{\sqrt{j(j+1)}}\left(2n(x-1)\,{}_2F_1\left(1-n, j+n+2; \frac{3}{2}; x\right) - \right.$$

$$\left. -(jx+2n(x-1)+x-1)\,{}_2F_1\left(-n, j+n+2; \frac{3}{2}; x\right)\right), \tag{5.17}$$

$$(ii)\ M_2(x) = \frac{(1-x)^{j/2}}{\sqrt{j(j+1)x}}\left(2n(x-1)\,{}_2F_1\left(1-n, j+n+1; \frac{1}{2}; x\right) - \right.$$

$$\left. -(jx+2n(x-1))\,{}_2F_1\left(-n, j+n+1; \frac{1}{2}; x\right)\right), \tag{5.18}$$

$$(iii)\ K_3(x) = \frac{(1-x)^{j/2}}{\sqrt{j(j+1)}}\left(2n(x-1)\,{}_2F_1\left(1-n, j+n+2; \frac{3}{2}; x\right) - \right.$$

$$\left. -((j+2)x+2n(x-1)-1)\,{}_2F_1\left(-n, j+n+2; \frac{3}{2}; x\right)\right), \tag{5.19}$$

$$K_4(x) = \frac{(1-x)^{j/2}}{\sqrt{j(j+1)}\sqrt{x}}\left(2n(x-1)\,{}_2F_1\left(1-n, j+n+1; \frac{1}{2}; x\right) - \right.$$

$$-((j+1)x+2n(x-1))\,{}_2F_1\left(-n, j+n+1; \frac{1}{2}; x\right)\Bigg). \qquad (5.20)$$

Выбранные решения (5.13)–(5.16) определяют четыре набора решений, которым соответствуют дискретные спектры энергии частицы Дирака – Кэлера. Найденные решения (волновые функции и спектр энергии) демонстрируют существенные отличия от случая обычной дираковской частицы в сферическом пространстве Римана.

Явный вид уравнения Дирака в этой геометрической модели следующий:

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin r}\Sigma_{\theta\phi} - m\right)\Psi = 0\,. \qquad (5.21)$$

Общая структура волновых функций, отвечающих диагонализации оператора полного момента дираковской частицы, имеет вид

$$\tilde{\Psi} = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} f_1(r)\,D_{-1/2} \\ f_2(r)\,D_{+1/2} \\ f_3(r)\,D_{-1/2} \\ f_4(r)\,D_{+1/2} \end{vmatrix}, \qquad (5.22)$$

где функции Вигнера [35] обозначены как $D_\sigma = D^J_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$; J принимает полуцелые значения: $J = 1/2, 3/2, ...$ Опуская детали вычислений [34], приведем спектр энергии для дираковской частицы в сферическом пространстве

$$\varepsilon^2 - m^2 = (n+J+1)^2, \qquad (5.23)$$

или в обычных единицах измерения

$$E^2 - m^2c^4 = \frac{\hbar^2 c^2}{\rho^2}(n+J+1)^2\,, \qquad (5.24)$$

где ρ обозначает радиус кривизны сферического пространства Римана.

Все четыре серии энергетических уровней для частицы Дирака – Кэлера (5.13)–(5.16) отличаются от спектра энергии дираковской частицы (5.24). Можно также отметить, что $p^2_{(2)} \to p^2_{(1)}$, $p^2_{(4)} \to p^2_{(3)}$, если j сдвигается на единицу: $j \to j+1$. Однако соответствующие волновые функции различаются и, следовательно, представляют различные состояния. Таким образом, спектр энергии частицы Дирака – Кэлера состоит из двух различающихся серий уровней энергии. Найденный спектр энергии для частицы Дирака – Кэлера в сферическом пространстве Римана существенно отличается от спектра энергии обычной дираковской частицы в этом пространстве. Спектр энергии для частицы Дирака – Кэлера существенно более сложный. Ни один из найденных уровней энергии не совпадает с уровнем энергии обычной частицы Дирака в сферическом пространстве Римана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac, P. A. M. The Quantum Theory of the Electron / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 117. – P. 610–624; The Quantum Theory of the Electron. Part II / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. 1928. – Vol. 118. – P. 351–361.

2. Darwin, C. G. The wave equation of the electron / C. G. Darwin // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 118. – P. 654–680.

3. Ivanenko, D. Zur theorie des magnetischen electrons / D. Ivanenko, L. Landau // Zeit. Phys. – 1928. – Bd. 48, № 8. – S. 340–348.

4. Lanczos, C. The tensor analytical relationships of Dirac's equation / C. Lanczos // Zeit. Phys. – 1929. – Vol. 57. – P. 447–473.

5. Whittaker, E. T. On the relations of the tensor-calculus to the spinor-calculus / E. T. Whittaker // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1937. – Vol. 158. – P. 38–46.

6. Ruse, H. S. On the geometry of Dirac's equations and their expression in tensor form / H. S. Ruse // Proc. Roy. Soc. Edin. – 1936. – Vol. 57. – P. 97–127.

7. Taub, A. H. Tensors equations equivalent to the Dirac equations / A. H. Taub // Ann. Math. – 1939. – Vol. 40. – P. 937.

8. Taub, A. H. Spinor equations for the meson and their solution when no field is present / A. H. Taub // Phys. Rev. – 1939. – Vol. 56, № 8. – P. 799–810.

9. Kähler, E. Innerer and äusserer Differentialkalkül / E. Kähler // Rendoconti di Mat. (Roma). – 1962. – Ser. 5. – S. 425–523.

10. Klauder, J. R. Linear representation of spinor fields by antysymmetric tensors / J. R. Klauder // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, № 9. – P. 1204–1214.

11. Penney, R. Tensorial description of neutrinos / R. Penney // J. Math. Phys. – 1965. – Vol. 6, № 7. – P. 1026–1028.

12. Cereignani, C. Linear representations of spinors by tensors / C. Cereignani // J. Math. Phys. – 1967. – Vol. 8, № 3. – P. 417–422.

13. Streater, R. F. Fermion states of a boson field / R. F. Streater, I. F. Wilde // Nucl. Phys. B. – 1970. – Vol. 24, № 3. – P. 561–575.

14. Durand, E. 16-component theory of the spin-1 particle and its generalization to arbitrary spin / E. Durand // Phys. Rev. D. – 1975. – Vol. 11, № 12. – P. 3405–3416.

15. Strazhev, V. I. On the symmetry group of extended equations for a vector field / V. I. Strazhev // Izvestiya Vuzov. Fizika. – 1977. – № 8. – P. 45–48.

16. Kruglov, S. I. Internal symmetries and conservation lows in classical theory of a vector field of general type / S. I. Kruglov, V. I. Strazhev // Izvestiya Vuzov. Fizika. – 1978. – № 4. – P. 77–81.

17. Strazhev, V. I. Dirac – Kähler equation, classical theory / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, D. A. Tsionenko. – Minsk : BGU, 2007.

18. Graf, W. Differential forms as spinors / W. Graf // Ann. Inst. H. Poincaré. A. – 1978. – Vol. 29, № 1. – P. 85–109.

19. Benn, I. M. Fermions without spinors / I. M. Benn, R. W. Tucker // Commun. Math. Phys. – 1983. – Vol. 89, № 3. – P. 341–362.

20. Benn, I. M. Clifford analysis of exterior forms and Fermi-Bose symmetry / I. M. Benn, R.W. Tucker // J. Phys. A. – 1983. – Vol. 16, № 17. – P. 4147–4153.

21. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dothan, D. Horn // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 117, № 7. – P. 413–417.

22. Garbaczewski, P. Quantization of spinor fields. Meaning of «bosonization» in (1+1) and (1+3) dimensions / P. Garbaczewski // J. Math. Phys. – 1982. – Vol. 23, № 3. – P. 442–450.

23. Pletyukhov, V. A. Tensorial equations and Dirac particles with internal degrees of freedom / V. A. Pletyukhov, V. I. Strazhev // Yadernaya Fizika. – 1989. – Vol. 49. – P. 1505–1514.

24. Holland, P. R. Tensor conditions for algebraic spinors / P. R. Holland // J. Phys. A. – 1983. – Vol. 16, № 11. – P. 2363–2374.

25. Obukhov, Y. N. Reduction of the Dirac equation and its connection to Ivanenko–Landau–Kähler equation / Y. N. Obukhov, S. N. Solodukhin // TMP. –1993. – Vol. 94. – P. 276–295.

26. Bullinaria, J. A. Kähler fermions in arbitrary space–times, their dimensional reduction and relation to spinorial fermions / J. A. Bullinaria // Ann. Phys. (N.Y.). – 1986. – Vol. 168, № 2. – P. 301–343.

27. Krolikowski, W. Dirac equation with hidden extra spin: a generalization of Kähler equation. I., II / W. Krolikowski // Acta Phys. Polon. B. – 1989. – Vol. 20, № 10. – P. 849–858; Acta Phys. Polon. B. – 1990. – Vol. 21, № 3. – P. 201–207.

28. Kruglov, S. I. Symmetry and electromagnetic interactions of Fields with multi-spin / S. I. Kruglov. – N.Y. : Nova Science Pub. Inc., Hauppauge, 2000.

29. Kruglov, S. I. Dirac – Kähler equations / S. I. Kruglov // Intern. J. Theor. Phys. – 2002. – Vol. 41. – P. 653–687.

30. Marchuk, N. G. A tensor form of the Dirac equation / N. G. Marchuk // Nuovo Cim. B. – 2001. – Vol. 116, № 10. – P. 1225–1248.

31. Marchuk, N. G. Dirac-type tensor equations with non-Abelian gauge symmetries on pseudo-Riemannian space / N. G. Marchuk // Nuovo Cim. B. – 2002. – Vol. 117. – P. 95–120.

32. Marchuk, N. G. The Dirac equation vs. the Dirac type tensor equation / N. G. Marchuk // Nuovo Cim. B. – 2002. – Vol. 117. – P. 511–520.

33. Ovsiyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Redkov. – New York : Nova Science Publishers, Inc., 2014. – 486 p.

34. Redkov, V. M. Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. M. Redkov, E. M. Ovsiyuk. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2012. – 434 p.

35. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука, 1975. – 441 с.

36. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Белорус. наука, 2011. – 339 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.01.2015

Ishkhanyan A.M., Florea O., Ovsiyuk E.M., Redkov V.M. **Dirac − Kähler Particle in Riemann Spherical Space: Boson Interpretation, Exact Solutions**

We construct the exact general solution of the Dirac – Kähler equation for the case of the spherical Riemann space of constant positive curvature. In the case of the minimal value of the total angular momentum, $j = 0$, the radial equations are reduced to second-order ordinary differential equations, which are solved in terms of the hypergeometric functions. For non-zero values of the total angular momentum, the radial equations are reduced to a pair of complicated fourth-order differential equations. Employing the factorization approach, we derive the general solution of these equations involving four independent fundamental solutions written in terms of combinations of the hypergeometric functions. The corresponding discrete energy spectrum is then determined via termination of the involved hypergeometric series, resulting in quasi-polynomial wave-functions. The constructed solutions lead to notable observations when compared with those for the ordinary Dirac particle.