УДК 517.518.2

А.Н. Нестеренко

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТРЕТЬЕГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В работе получены новые неравенства для третьих равномерных модулей непрерывности функций, равномерно непрерывных на оси.

Пусть $UC(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Для функции $f\in UC(\mathbb{R})$ рассматриваем ее k-ый модуль непрерывности при $k=1$, $k=2$ и $k=3$:

$$\omega_k(f,t)=\sup\left\{\left|\Delta_h^k(f,x)\right| : x\in\mathbb{R},\ 0<h\le t\right\},\quad t>0,$$

где $\Delta_h^k(f,x)$ – k-ая конечная разность функции f в точке $x\in\mathbb{R}$ с шагом $h>0$:

$$\Delta_h^1(f,x)=f(x+h)-f(x),$$

$$\Delta_h^2(f,x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x),$$

$$\Delta_h^3(f,x)=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x).$$

Отметим, что свойства модулей непрерывности функций, заданных на $\mathbb{R}$, в целом аналогичны свойствам модулей непрерывности функций, заданных на отрезке, которые детально изложены, например, в монографиях [1], [2].

Для модулей непрерывности первого порядка хорошо известен критерий того, что данная функция является модулем непрерывности некоторой функции ([1] – [3]). Для модулей непрерывности старших порядков такой критерий до сих пор не получен. В связи с этим представляет интерес неравенство для второго модуля непрерывности, установленное С.В. Конягиным [4]:

$$2\omega_2(f,T)\le\omega_2(f,T+t)+\omega_2(f,T-t)+2\omega_2(f,t),\ \ 0\le t\le T,\quad f\in UC(\mathbb{R}).$$

В работе [5] доказан аналог неравенства С.В. Конягина для третьего модуля непрерывности в следующей форме:

$$2\omega_3(f,Nu)\le\omega_3(f,(N+1)u)+\omega_3(f,(N-1)u)+6N\omega_3(f,u),\ u>0,\ N\in\mathbb{N}.$$

В настоящей работе получены некоторые аналоги и обобщения этого неравенства.

Лемма 1. *Для функции* $f\in UC(\mathbb{R})$ *и чисел* $N\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $k<N$, $x\in\mathbb{R}$, $h>0$ *верно тождество*

$$\Delta_{(N+k)h}^3(f,x-kh)+\Delta_{(N-k)h}^3(f,x+kh)-2\Delta_{Nh}^3(f,x)=$$

$$=\Delta_{kh}^2(f,x+3Nh)+2\Delta_{kh}^2(f,x+(3N-k)h)+\Delta_h^2(f,x+(3N-2k)h)-$$

$$-3\Delta_{kh}^2(f,x+(2N-k)h)-\Delta_{kh}^2(f,x-kh).$$

Доказательство. Учитывая определение третьей конечной разности и выражение для второй конечной разности с шагом $2h$ через такую же разность с шагом h [1, с. 158], получаем

$$\Delta_{(N+k)h}^3(f,x-kh)+\Delta_{(N-k)h}^3(f,x+kh)-2\Delta_{Nh}^3(f,x)=$$

$$=f(x+(3N+2k)h)-3f(x+(2N+k)h)+3f(x+Nh)-f(x-kh)+$$

$$+f\left(x+\left(3N-2k\right)h\right)-3f\left(x+\left(2N-k\right)h\right)+3f\left(x+Nh\right)-f\left(x+kh\right)-$$
$$-2f\left(x+3Nh\right)+6f\left(x+2Nh\right)-6f\left(x+Nh\right)+2f\left(x\right)=$$
$$=\Delta_{2kh}^{2}\left(f,x+\left(3N-2k\right)h\right)-3\Delta_{kh}^{2}\left(f,x+\left(2N-k\right)h\right)-\Delta_{kh}^{2}\left(f,x-kh\right)=$$
$$=\Delta_{kh}^{2}\left(f,x+3Nh\right)+2\Delta_{kh}^{2}\left(f,x+\left(3N-k\right)h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(3N-2k\right)h\right)-$$
$$-3\Delta_{kh}^{2}\left(f,x+\left(2N-k\right)h\right)-\Delta_{kh}^{2}\left(f,x-kh\right).$$

Лемма 2. *Для функции* $f\in UC\left(\mathbb{R}\right)$ *и чисел* $N\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\le N$, $u>0$ *верно неравенство*

$$2\omega_3\left(f,\,Nu\right)\le\omega_3\left(f,\,\left(N+k\right)u\right)+\omega_3\left(f,\,\left(N-k\right)u\right)+8\omega_2\left(f,\,ku\right).$$

Доказательство следует из тождества леммы 1 и очевидного неравенства

$$\left|\Delta_h^2\left(f,\,x\right)\right|\le\omega_2\left(f,\,u\right),\ 0<h\le u,\ x\in\mathbb{R},$$

при этом случай $N=k$ тривиален.

Теорема 1. *Для функции* $f\in UC\left(\mathbb{R}\right)$ *верно неравенство*

$$2\omega_3\left(f,\,T\right)\le\omega_3\left(f,\,T+t\right)+\omega_3\left(f,\,T-t\right)+8\omega_2\left(f,\,t\right),\ \ 0\le t\le T.$$

Далее через $\left[a\right]$ обозначим целую часть числа $a\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Для заданных чисел $T\ge0$ и $t\ge0$, $t\le T$, положим $N_n:=\left[nT\right]$, $k_n:=\left[nt\right]$, $n\ge1$. Применим неравенство леммы 2 к числам N_n, k_n и $u=\dfrac{1}{n}$ и перейдем в нем к пределу при $n\to\infty$. Учитывая непрерывность функции ω_3 на промежутке $\left[0,+\infty\right)$ [1, с. 162], а также соотношения $N_n\dfrac{1}{n}\to T$, $n\to\infty$, и $k_n\dfrac{1}{n}\to t$, $n\to\infty$, получим доказываемое неравенство.

Следствие 1. *Для функции* $f\in UC\left(\mathbb{R}\right)$ *верно неравенство*

$$2\omega_3\left(f,\,T\right)\le\omega_3\left(f,\,T+t\right)+\omega_3\left(f,\,T-t\right)+16\omega_1\left(f,\,t\right),\ \ 0\le t\le T.$$

Доказательство следует из теоремы 1 и неравенства [1, с. 164]

$$\omega_2\left(f,\,u\right)\le2\omega_1\left(f,\,u\right),\ u\ge0.$$

Теорема 2. *Для функции* $f\in UC\left(\mathbb{R}\right)$ *и чисел* $N\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\le N$, $u>0$ *верно неравенство*

$$2\omega_3\left(f,\,Nu\right)\le\omega_3\left(f,\,\left(N+k\right)u\right)+\omega_3\left(f,\,\left(N-k\right)u\right)+6Nk^2\omega_3\left(f,\,u\right).$$

Доказательство. Пусть $h\in(0,u]$ – произвольное фиксированное число. Рассматривая третью конечную разность как разность вторых конечных разностей, для произвольных $l\in\mathbb{Z}$ и $m\in\mathbb{N}$ имеем

$$\left|\Delta_h^2\left(f,\,x+\left(l+m\right)h\right)-\Delta_h^2\left(f,\,x+lh\right)\right|=$$
$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left(\Delta_h^2\left(f,\,x+\left(l+k+1\right)h\right)-\Delta_h^2\left(f,\,x+\left(l+k\right)h\right)\right)\right|=$$
$$=\left|\sum_{k=0}^{m-1}\Delta_h^3\left(f,\,x+\left(l+k\right)h\right)\right|\le\sum_{k=0}^{m-1}\left|\Delta_h^3\left(f,\,x+\left(l+k\right)h\right)\right|\le\omega_3\left(f,\,u\right)m.$$

Учитывая эту оценку и выражение для второй конечной разности с шагом kh через такую же разность с шагом h [1, с. 158], для произвольных $l\in\mathbb{Z}$ и $m\in\mathbb{N}$ получаем

$$\left| \Delta_{kh}^2 \left(f,\, x+(l+m)h \right) - \Delta_{kh}^2 \left(f,\, x+lh \right) \right| =$$

$$\left| \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_h^2 \left(f, x+(i+j+l+m)h \right) - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \Delta_h^2 \left(f, x+(i+j+l)h \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \omega_3 (f,\, u) m = mk^2 \omega_3 (f,\, u).$$

Применим это неравенство для оценки правой части тождества леммы 1:

$$\left| \Delta_{kh}^2 \left(f, x+3Nh \right) + 2\Delta_{kh}^2 \left(f, x+(3N-k)h \right) + \Delta_h^2 \left(f, x+(3N-2k)h \right) - \right.$$

$$\left. -3\Delta_{kh}^2 \left(f, x+(2N-k)h \right) - \Delta_{kh}^2 \left(f, x-kh \right) \right| =$$

$$= \left| \Delta_{kh}^2 \left(f, x+3Nh \right) - \Delta_{kh}^2 \left(f, x+(2N-k)h \right) + 2\left(\Delta_{kh}^2 \left(f, x+(3N-k)h \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. -\Delta_{kh}^2 \left(f, x+(2N-k)h \right) \right) + \Delta_{kh}^2 \left(f, x+(3N-2k)h \right) - \Delta_{kh}^2 \left(f, x-kh \right) \right| \le$$

$$\le \left(N+k+2N+3N-k \right) k^2 \omega_3 (f, u) = 6Nk^2 \omega_3 (f, u).$$

Следовательно,

$$\left| \Delta_{(N+k)h}^3 \left(f, x-kh \right) + \Delta_{(N-k)h}^3 \left(f, x+kh \right) - 2\Delta_{Nh}^3 \left(f, x \right) \right| \le 6Nk^2 \omega_3 (f, u),$$

откуда

$$2\left| \Delta_{Nh}^3 (f,\, x) \right| \le \left| \Delta_{(N+k)h}^3 \left(f,\, x-kh \right) \right| + \left| \Delta_{(N-k)h}^3 \left(f,\, x+kh \right) \right| + 6Nk^2 \omega_3 (f,\, u) \le$$

$$\le \omega_3 \left(f,\, (N+k)u \right) + \omega_3 \left(f,\, (N-k)u \right) + 6Nk^2 \omega_3 (f,\, u).$$

Если h пробегает весь промежуток $(0,u]$, то Nh пробегает весь промежуток $(0, Nu]$, поэтому из полученного неравенства и определения точной верхней грани и следует утверждение теоремы 2.

Следствие 2. *Для функции* $f \in UC(\mathbb{R})$ *и чисел* $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $0 < t \le T$ *верно неравенство*

$$2\omega_3 (f,\, T) \le \omega_3 \left(f,\, T+(k+1)t \right) + \omega_3 \left(f,\, T-(k-1)t \right) + 6\left(\left[\frac{T}{t} \right] + 1 \right) k^2 \omega_3 (f,\, t),$$

в частности, при $k = 2$

$$2\omega_3 (f,\, T) \le \omega_3 (f,\, T+3t) + \omega_3 (f,\, T-t) + 24\left(\left[\frac{T}{t} \right] + 1 \right) \omega_3 (f,\, t).$$

Доказательство. Для произвольных $0 < t \le T$ положим $N := \left[\frac{T}{t} \right]$. Тогда $Nt \le T < (N+1)t$, поэтому

$$2\omega_3 (f,\, T) \le 2\omega_3 \left(f,\, (N+1)t \right) \le$$

$$\le \omega_3 \left(f,\, (N+1+k)t \right) + \omega_3 \left(f,\, (N+1-k)t \right) + 6(N+1)2^k \omega_3 (f,\, t) \le$$

$$\le \omega_3 \left(f,\, T+(k+1)t \right) + \omega_3 \left(f,\, T-(k-1)t \right) + 6\left(\left[\frac{T}{t} \right] + 1 \right) 2^k \omega_3 (f,\, t).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзядык, В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М. : Наука, 1977. – 512 с.

2. Шевчук, И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций / И.А. Шевчук. – К. : Наукова думка, 1992. – 224 с.

3. Никольский, С.М. Ряд Фурье с данным модулем непрерывности / С.М. Никольский // ДАН СССР. – 1946. – Т. 52, № 3. – С. 191 – 194.

4. Конягин, С.В. О вторых модулях непрерывности / С.В. Конягин // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 1–3.

5. Безкрила, С. І. Про треті модулі неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Украин. матем. журн. (в печати).

O.N. Nesterenko **Some Properties of the Third Modulus of Continuity**

We obtain new inequalities for third uniform modulus of continuity of functions uniformly continuous on an axis.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.10.13