УДК 512.542

С.А. Серая, А.А. Трофимук

О A_4-СВОБОДНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИНДЕКСЫ НЕКОТОРЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Исследуется конечная A_4-свободная нормальная подгруппа K группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K, равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. В частности, установлено, что нильпотентная длина такой подгруппы не превышает 4, производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 5, p-длина подгруппы K не превышает 2 для всех простых p. Построены примеры, показывающие точность полученных оценок. В доказательствах использовались фрагменты теории формаций и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Напомним, что группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

Пусть K – нормальная подгруппа группы G. В 2000 г. Л.А. Шеметков предложил рассмотреть строение нормальной разрешимой подгруппы группы с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп.

В работе [2, теорема 3.1] Л.А. Шеметков показал, что если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K, равен простому числу, то подгруппа K сверхразрешима. Л.Я. Поляков [3, теорема 1] установил разрешимость нормальной подгруппы K группы G, у которой индекс каждой её максимальной подгруппы, не содержащей K, есть простое число либо квадрат простого числа. Если предположить, что в группе индексы максимальных подгрупп, не содержащих K, делятся еще и на кубы простых чисел, то группа может быть неразрешимой. Примером служит группа $PSL(2,7)$, индексы максимальных подгрупп которой равны 7 и 8.

Из утверждения М.В. Селькина [4, следствие 3.2.6] следует, что если в группе G все максимальные подгруппы, не содержащие нормальную подгруппу K, имеют примарные индексы, то либо группа K разрешима, либо $K/S(K)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(K)$ – разрешимый радикал группы K.

Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная A_4, то A_4-свободная нормальная подгруппа K группы G, у которой индекс любой максимальной подгруппы, не содержащей K, примарен, является разрешимой.

В работе [5] В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская получили оценки производной, нильпотентной и p-длины нормальной подгруппы K группы G, у которой индекс каждой её максимальной подгруппы, не содержащей K, есть простое число, квадрат простого числа или куб простого числа.

Следующая теорема даёт новую информацию о строении такой A_4-свободной нормальной подгруппы K.

Теорема. *Пусть K – A_4-свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K, равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы*

$K/\Phi(K)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы K не превышает 4, p-длина не превышает 2 для всех простых p.

Пример 1. С помощью компьютерной системы GAP построена группа $G=[E_{7^3}]([S]SL(2,3))$, где S – экстраспециальная группа порядка 27. Ясно, что $|G|=2^4 3^4 7^3$. В группе G существует нормальная A_4-свободная подгруппа $K=[E_{7^3}]([S]Q_8)$ с единичной подгруппой Фраттини. Здесь Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Индексы максимальных подгрупп группы G, не содержащих K, принадлежат множеству $\{4,9,343\}$, а производная длина подгруппы K равна 5. Значит оценка производной длины в теореме точная.

Следствие 1. *Пусть K – A_4-свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K, равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел $p\in\{2,3,5\}$. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ и нильпотентная длина группы K не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p\neq 3$.*

Пример 2. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3. A_4-свободная группа $G=[E_{3^3}]([Z_{13}]Z_3)$ порядка 1053 с единичной подгруппой Фраттини, индексы максимальных подгрупп которой принадлежат множеству $\{3,13,27\}$, имеет производную длину равную 3, нильпотентную длину равную 3, 3-длину равную 2, 13-длину равную 1. Здесь Z_n – циклическая группа порядка n. Следовательно, оценки производной длины, нильпотентной длины и p-длины, полученные в следствии 1, являются точными.

Следствие 2. *Пусть K – A_4-свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K, равными простым числам или квадратам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ и нильпотентная длина группы K не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p\neq 3$.*

Пример 3. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3. Группа $G=[E_{3^3}]SL(2,3)$ порядка 648 имеет нормальную A_4-свободную подгруппу $K=[E_{3^3}]Q_8$ с единичной подгруппой Фраттини. Индексы максимальных подгрупп группы G, не содержащих K, принадлежат множеству $\{3,4,9\}$. Производная длина группы K равна 3. Здесь Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Следовательно, оценка производной длины, полученная в следствии 2, является точной.

В случае, когда $K=G$ получим целый ряд следствий.

Следствие 3. *Пусть G – A_4-свободная группа с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам, квадратам простых чисел или кубам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы G не превышает 4, p-длина не превышает 2 для всех простых p.*

Следствие 4. *Пусть G – A_4-свободная группа с индексами максимальных подгрупп, равными простым числам или квадратам простых чисел. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p-длина не превышает 1 для всех простых $p\neq 3$.*

1. Вспомогательные результаты

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных, абелевых и сверхразрешимых групп обозначают через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.*

Доказательство. Согласно [6, с. 36] произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2 ([7], лемма 9, лемма 10, лемма 11). **1.** *Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1,\ GL(3,2),\ Z_2,\ Z_3,\ Z_7,\ Z_2 \times Z_2,\ Z_4,\ D_8,\ S_3,\ A_4,\ S_4,\ [Z_7]Z_3\}$. В частности, если H A_4-свободна, то H метациклическая.*

2. *Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,3)$ и $O_3(H)=1$, то $H \cong Z_2 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_{13}, A_4, S_4, [Z_{13}]Z_3, SL(2,3), GL(2,3)\}$. В частности, если H A_4-свободна, то H метабелева.*

3. *Если H – разрешимая подгруппа группы $GL(3,5)$ и $O_5(H)=1$, то $H \cong Z_2 \times D$, $H \cong Z_4 \times D$ или $H \cong D$, где D либо 2-группа производной длины не превосходящей 2, либо $D \in \{Z_3,\ Z_6,\ S_3,\ [Z_3]Z_4,\ Z_{12},\ D_{12},\ A_4,\ S_4,\ Z_4 \times S_3,\ Z_{24},\ [Z_3]Z_8,\ Z_{31},\ SL(2,3),\ [SL(2,3)]Z_2,\ [Z_4 \times Z_4]Z_3,\ [Z_{24}]Z_2,\ [Z_{31}]Z_3,\ [[Z_4 \times Z_4]Z_3]Z_2,\ [SL(2,3)]Z_4\}$. В частности, если H – неприводимая A_4-свободна группа, то производная длина H не превышает* 2.

Здесь S_n – симметрическая группа степени n.

Лемма 3 [7, лемма 7]. *Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.*

Лемма 4 [1, теорема 2.8]. *Пусть G – группа и H – ее подгруппа. Тогда фактор-группа $N_G(H)/C_G(H)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\, H$.

Лемма 5 [1, теорема 2.16]. 1. *Если H – группа простого порядка p, то группа всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, H$ циклическая порядка p-1.*

2. *Если H – циклическая группа, то группа $\mathrm{Aut}\, H$ абелева.*

Лемма 6 [7, лемма 12-13]. **1.** *Если H – разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева.*

2. *Если H – разрешимая A_4-свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3,p)$, то $H \in \mathfrak{A}^4 \cap \mathfrak{N}^3$.*

Кроме того, если $n \in \{2,3\}$, $p > 3$ и $O_p(H)=1$, то H – p'-группа.

Лемма 7 [8, лемма VI.6.9]. *Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда:*

1. *Если N – нормальная подгруппа группы G, то $l_p(G/N) \le l_p(G)$;*
2. *Если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G, то*

$l_p(G/N_1 \cap N_2) \leq Max\{l_p(G/N_1),\ l_p(G/N_2)\}$;

3. $l_p(G/\Phi(G)) = l_p(G)$.

Лемма 8. *Если* G *– разрешимая группа и* $F(G) = E_4 \neq G$*, то* $G \cong A_4$ *или* $G \cong S_4$.

Доказательство. Поскольку $F(G)$ – абелева подгруппа, то согласно теореме 4.22 [1] $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $\mathrm{Aut}(F(G)) \cong GL(2,2) \cong S_3$, то либо $G/F(G) \cong Z_3$, либо $G/F(G) \cong S_3$. Если $G/F(G) \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F(G) \cong S_3$, то $G \cong S_4$.

1. Доказательство теоремы

Применим индукцию по порядку подгруппы K. Покажем, что $K \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Пусть N – произвольная нормальная неединичная подгруппа группы G и M/N – максимальная подгруппа группы G/N, не содержащая нормальную подгруппу KN/N. Тогда очевидно, что M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая подгруппу K. По условию теоремы индекс подгруппы M есть простое число, квадрат простого или куб простого числа. Так как $|G:M| = |G/K:M/K|$, то индекс максимальной подгруппы M/K в группе G/K есть простое число, квадрат простого или куб простого числа. Таким образом, условие теоремы наследуют все фактор-группы KN/N. Поэтому справедливо включение $KN/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть N_1 и N_2 – минимальные нормальные подгруппы группы G. Тогда по индукции $K/K \cap N_1 \cong KN_1/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $K/K \cap N_2 \cong KN_2/N_2 \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ формация, то $K \cong K/K \cap N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа.

Так как K – разрешимая подгруппа, то подгруппа Фраттини $\Phi(K)$ группы K является собственной подгруппой подгруппы Фиттинга $F = F(K)$ и $F = C_K(F)$. Так как F единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\Phi(K) = 1$, F – элементарная абелева подгруппа и существует максимальная в группе G подгруппа M такая, что $G = [F]M$. Очевидно, что подгруппа M не содержит подгруппу F, а, значит, по условию имеет индекс в группе G равный простому числу, квадрату простого или кубу простого числа.

Предположим сначала, что индекс подгруппы M является простым числом, т.е. $|F| = |G:M| = p$. Тогда по лемме 4 и лемме 5 фактор-группа K/F является циклической группой, как группа автоморфизмов группы F простого порядка p. Ясно, что в этом случае справедливо включение $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $|F| = |G:M| = p^2$. Тогда по лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(2,p)$. В этом случае по лемме 6(1) подгруппа $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2 \subset \mathfrak{F}$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = |G:M| = p^3$. По лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(3,p)$. Если K/F – неприводимая подгруппа, то по лемме 6(2) $K/F \in \mathfrak{A}^4 \cap \mathfrak{N}^3$ и $K \in \mathfrak{F}$. Пусть K/F действует приводимо на F. Так как F – подгруппа Фиттинга группы K и $\Phi(K) = 1$, то F – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы K. Так как $|F| = p^3$, то возможны две ситуации: $F = F_1 \times F_2 \times F_3$ и $F = H_1 \times H_2$, где $|F_1| = |F_2| = |F_3| = |H_1| = p, |H_2| = p^2$. Если $F = F_1 \times F_2 \times F_3$, то по лемме 5 $K/C_K(F_i)$ –

циклическая группа и K/F абелева, как подгруппа группы $K/C_K(F_1)\times K/C_K(F_2)\times K/C_K(F_3)$. Поэтому $K\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}\subset\mathfrak{F}$. Если $F=H_1\times H_2$, то по лемме 5 $K/C_K(H_1)$ – циклическая группа, а по лемме 6 (1) $K/C_K(H_2)\in\mathfrak{A}^2$. Теперь $K/F\in\mathfrak{A}^2$, как подгруппа группы $K/C_K(H_1)\times K/C_K(H_2)$. Поэтому $K\in\mathfrak{F}$.

Итак, в любом случае $K\in\mathfrak{F}=\mathfrak{N}^4\cap\mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. По лемме 3 $K/\Phi(K)\in\mathfrak{A}^5$ и производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 5. Так как $K\in\mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина K не превышает 4. Так как метанильпотентная группа имеет *p*-длину ≤ 1, то *p*-длина подгруппы K не превышает 2.

2. Доказательство следствия 1

Применим индукцию по порядку подгруппы K. Покажем, что $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Для случая, когда индекс максимальной подгруппы M, не содержащей K, является простым числом или квадратом простого числа, доказательство следствия 1 полностью повторяет доказательство теоремы.

Остается рассмотреть случаи, когда $|F|=|F(K)|=|G:M|$ равен либо 2^3, либо 3^3, либо 5^3. Если $|F|=2^3$ или $|F|=3^3$, то по лемме 4 K/F изоморфна некоторой подгруппе либо полной линейной группы $GL(3,2)$, либо полной линейной группы $GL(3,3)$. Как в первом, так и во втором случае $K/F\in\mathfrak{A}^2$. Поэтому $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Пусть $|F|=5^3$. Тогда по лемме 4 фактор-группа K/F изоморфна некоторой подгруппе полной линейной группы $GL(3,5)$.

Если K/F – неприводимая подгруппа, то по лемме 2(3) $K/F\in\mathfrak{A}^2$ и $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Пусть K/F действует приводимо на F. Так как F – подгруппа Фиттинга группы K и $\Phi(K)=1$, то F – прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы K. Так как $|F|=5^3$, то возможны две ситуации: $F=F_1\times F_2\times F_3$ и $F=H_1\times H_2$, где $|F_1|=|F_2|=|F_3|=|H_1|=5, |H_2|=5^2$. Если $F=F_1\times F_2\times F_3$, то $K/C_K(F_i)$ – циклическая группа и K/F абелева, как подгруппа группы $K/C_K(F_1)\times K/C_K(F_2)\times K/C_K(F_3)$, поэтому $K\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Если $F=H_1\times H_2$, то по лемме 5 $K/C_K(H_1)$ – циклическая группа, а по лемме 6 (1) $K/C_K(H_2)\in\mathfrak{A}^2$. Теперь $K/F\in\mathfrak{A}^2$, как подгруппа группы $K/C_K(H_1)\times K/C_K(H_2)$. Поэтому $K \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Итак, в любом случае $K\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. По лемме 3 $K/\Phi(K)\in\mathfrak{A}^3$. Тогда производная длина фактор-группы $K/\Phi(K)$ не превышает 3 и нильпотентная длина K не превышает 3.

Так как $K\in\mathfrak{N}^3$, то *p*-длина подгруппы K не превышает 2. Используя индукцию по порядку группы K, докажем, что *p*-длина не превышает 1 для всех простых $p\ne 3$.

Так как условие следствия наследуют все фактор-группы KN/N, то по лемме 7 можно считать, что $O_{p'}(K)=\Phi(K)=1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Таким образом, подгруппа Фиттинга $F=F(K)=F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка p^{α}, обладающая дополнением M в группе G, т. е $G=[F]M$. Поскольку $|F|=|G:M|$ и M – максимальная подгруппа группы G, не содержащая подгруппу K, то $\alpha\le 2$ при $p>5$ или $\alpha\le 3$ при $p=2$ и $p=5$. Так как $C_K(F)=F$, то $O_p(K/F)=1$ и фактор-группа K/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(\alpha,\ p)$.

Если $|F| = p$, то по лемме 5 фактор-группа K/F является циклической группой порядка $p-1$ и p-длина группы K не превышает 1. Пусть $|F| = p^2$. Тогда для $p > 3$ по лемме 6 фактор-группа K/F является p'-группой, как группа изоморфная некоторой разрешимой подгруппе H группы $GL(2, p)$. В этом случае p-длина группы K не превышает 1.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 2^3$. Тогда K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,2)$. Так как $O_2(K/F) = 1$, то из леммы 2(1) следует, что K/F – p'-группа и поэтому p-длина группы K не превышает 1.

Рассмотрим случай, когда $|F| = 5^3$. Тогда K/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы $GL(3,5)$. Так как $O_5(K/F) = 1$, то из леммы 2(3) следует, что K/F – p'-группа и поэтому p-длина группы K не превышает 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монаховю. – Минск : Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.
2. Шеметков, Л.А. О конечных разрешимых группах / Л.А. Шеметков // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т.32, №3. – С.533–559.
3. Поляков, Л.Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы / Л.Я. Поляков // Конечные группы: сб. – Минск, 1966. – С.89–97.
4. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 144 с.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. – 1978. –272 с.
7. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – Т. 52, № 5. – 2011. – С. 1123–1137.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.

S.A. Seraja, A.A. Trofimuk **On A_4-Free Normal Subgroups of Groups with Restrictions on Indexes of Some Maximal Subgroups**

We study finite A_4-free subgroup K of group G in which indexes of maximal subgroups that not contain K, are equal to prime numbers, squares of primes or cube of primes. In particular found that the nilpotent length of such groups does not exceed 4, the derived length of $K/\Phi(K)$ does not exceed 5, and p-length does not exceed 2 for all prime p. We construct examples showing the accuracy of the estimates. The proofs include fragments of the theory of formations and calculations in the system of computer algebra GAP