УДК 517.983.54 + 519.6

О.В. Матысик

МЕТОД ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Для решения операторных уравнений с неограниченным линейным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Доказана сходимость метода в исходной норме гильбертова пространства при точной и приближённой правых частях уравнения. Получены априорные оценки погрешности метода, они оптимизированы. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого неявного метода и явного метода простых итераций.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H для решения операторного уравнения I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с неограниченным линейным самосопряженным оператором предлагается использовать неявный итерационный метод

$$(A^{2k} + B)x_{n+1} = Bx_n + A^{2k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \tag{2}$$

Здесь B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE,\ b > 0,$ E – тождественный оператор. Нуль принадлежит спектру оператора A, но не является его собственным значением, следовательно, задача (1) некорректна и имеет единственное решение x при точной правой части y. В случае приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ итерационный метод (2) запишется в виде

$$(A^{2k} + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N \tag{3}$$

2. Сходимость при точной правой части.

Имеет место

Теорема 1. *Итерационный процесс* (2) *сходится при условии* $b > 0$ *к точному решению уравнения* (1).

<u>Доказательство.</u>

По индукции нетрудно показать, что $x_n = A^{-1}[E - B^n(A^{2k} + B)^{-n}]y, \ B = bE.$ Рассмотрим $x - x_n = A^{-1}y - A^{-1}[E - B^n(A^{2k} + B)^{-n}]y = A^{-1}B^n(A^{2k} + B)^{-n}y.$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda$ (E_λ – спектральная функция A), получим $x - x_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda y =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x = \int_{0}^{+\infty} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x + \int_{-\infty}^{0} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x = I_1 + I_2.$$

Первый из полученных интегралов разобьем на два интеграла

$$I_1 = \int_0^{\varepsilon} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{b^n}{(\lambda^{2k} + b)^n} dE_\lambda x.$$

Так как $\frac{b}{\lambda^{2k} + b} \le q < 1$ для $\lambda \ge \varepsilon$, то

$$\left\| \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{b^n}{(\lambda^{2k}+b)^n} dE_\lambda x \right\| \le q^n \left\| \int_{\varepsilon}^{+\infty} dE_\lambda x \right\| \le q^n \|x\| \to 0, n \to \infty,$$

а для первого интеграла

$$\left\| \int_{0}^{\varepsilon} \frac{b^n}{(\lambda^{2k}+b)^n} dE_\lambda x \right\| \le \left\| \int_{0}^{\varepsilon} dE_\lambda x \right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0, \varepsilon \to 0$$

в силу свойств спектральной функции. Таким образом, $\|I_1\| \to 0,\ n \to \infty.$

Аналогично $\|I_2\| \to 0,\ n \to \infty$. Следовательно, $\|x - x_n\| \to 0,\ n \to \infty$, и сходимость метода (2) доказана. Таким образом, теорема 1 доказана.

3. Оценка скорости сходимости

Скорость убывания к нулю $\|x - x_n\|$ неизвестна и может быть сколь угодно малой. Для её оценки предположим, что решение уравнения (1) истокопредставимо, т.е.

$$x = A^{2s} z,\ s > 0. \tag{4}$$

Тогда

$$x - x_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{2s} b^n}{(\lambda^{2k}+b)^n} dE_\lambda z.$$

Найдем максимум подынтегральной функции

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{2s} b^n}{(\lambda^{2k}+b)^n}.$$

Приравняв нулю производную от $f(\lambda)$, получим уравнение для нахождения стационарных точек функции $f(\lambda)$:

$$\frac{\lambda^{2s-1} b^n [2s(\lambda^{2k}+b) - 2nk\lambda^{2k}]}{(\lambda^{2k}+b)^{n+1}} = 0.$$

Здесь $\lambda \ne 0$, так как в противном случае $f(\lambda) = 0$. Поэтому $s(\lambda^{2k}+b) - nk\lambda^{2k} = 0.$

Отсюда $\lambda^{2k} = \frac{sb}{nk-s}$ и $\lambda_{1/2}^* = \pm\left[\frac{sb}{nk-s}\right]^{1/(2k)}$ – стационарные точки функции $f(\lambda)$ при $nk > s$. В силу симметрии функции $f(\lambda)$ имеем $f(\lambda_1^*) = f(\lambda_2^*)$, поэтому достаточно рассмотреть $f(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_1^* = \left(\frac{bs}{nk-s}\right)^{\frac{1}{2k}}$. Поскольку $f''(\lambda_1^*) < 0$, то λ_1^* – точка максимума неотрицательной функции $f(\lambda)$. Найдем его.

$$\max_\lambda f(\lambda) = f(\lambda_1^*) = \left(\frac{bs}{nk-s}\right)^{s/k} \frac{b^n}{\left(\frac{bs}{nk-s}+b\right)^n} = \left(\frac{bs}{kn}\right)^{s/k} \left(\frac{kn-s}{kn}\right)^{-s/k} \left(\frac{kn-s}{kn}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{bs}{kn}\right)^{s/k} \left(1 + \frac{s}{kn-s}\right)^{-\left(n-\frac{s}{k}\right)} < \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k}.$$

Тогда

$$\|x - x_n\| \le \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{s/k} \|z\|, \quad kn > s. \tag{5}$$

4. Сходимость при приближенной правой части

Справедлива

Теорема 2. *При условии* $b > 0$ *метод* (3) *сходится, если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $\sqrt[2k]{n}\delta \to 0,\ \ n \to \infty,\ \ \delta \to 0.$

Доказательство.

Рассмотрим

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}[E - B^n(A^{2k}+B)^{-n}](y-y_\delta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k}+b)^n}\right] dE_\lambda(y-y_\delta).$$

Оценим сверху максимум модуля подынтегральной функции

$$g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^{2k}+b)^n}\right].$$

При $n = 1$ $\quad g_1(\lambda) = \frac{\lambda^{2k-1}}{\lambda^{2k}+b},\ g_1'(\lambda) = \frac{\lambda^{2k-2}[(2k-1)b-\lambda^{2k}b]}{(\lambda^{2k}+b)^2}$, отсюда $\lambda^{2k} = (2k-1)b,$

$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt[2k]{(2k-1)b}$ – критические точки функции $g_1(\lambda)$.

В силу симметричности $|g_1(\lambda)|$ достаточно рассмотреть $|g_1(\lambda)|$ только в одной точке, например, $\lambda_1 = \sqrt[2k]{(2k-1)b}$, т.е.

$$|g_1(\lambda_1)| = |g_1(\lambda_2)| = \frac{[(2k-1)b]^{(2k-1)/(2k)}}{(2k-1)b+b} = \frac{[(2k-1)b]^{(2k-1)/(2k)}}{2kb} \le \frac{1}{b^{1/(2k)}}.$$

Следовательно, $\max\limits_{\lambda}|g_1(\lambda)| \le \frac{1}{b^{1/(2k)}}$.

Покажем, что

$$\max_{\lambda}|g_n(\lambda)| \le 2k\frac{n^{1/(2k)}}{b^{1/(2k)}}. \tag{6}$$

При $n = 1$ неравенство (6) проверено. Предположим, что (6) верно при $n = m$, т.е. $g_m(\lambda) \le 2k\left(\frac{m}{b}\right)^{1/(2k)}$ и рассмотрим

$$g_{m+1}(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{b^{m+1}}{(\lambda^{2k}+b)^{m+1}}\right] = \lambda^{-1}\left[1 - \frac{b^m}{(\lambda^{2k}+b)^m}\right] + \lambda^{-1}\left[1 - \frac{b^{m+1}}{(\lambda^{2k}+b)^{m+1}}\right] -$$

$$-\lambda^{-1}\left[1 - \frac{b^m}{(\lambda^{2k}+b)^m}\right] \le 2k\left(\frac{m}{b}\right)^{1/(2k)} + \frac{\lambda^{2k-1}b^m}{(\lambda^{2k}+b)^{m+1}}.$$

Покажем, что

$$2k\left(\frac{m}{b}\right)^{1/(2k)} + \frac{\lambda^{2k-1}b^m}{(\lambda^{2k}+b)^{m+1}} \le 2k\left(\frac{m+1}{b}\right)^{1/(2k)}, \tag{7}$$

что равносильно неравенству

$$\frac{\lambda^{2k-1}b^m}{(\lambda^{2k}+b)^{m+1}} \le 2k \cdot b^{-1/(2k)}\left(\sqrt[2k]{m+1} - \sqrt[2k]{m}\right).$$

Отсюда

$$\frac{\lambda^{2k-1}b^{m+1}}{(\lambda^{2k}+b)^{m+1}} \cdot b^{-\frac{2k-1}{2k}} \le 2k\left(\sqrt[2k]{m+1} - \sqrt[2k]{m}\right).$$

Имеем

$$\sqrt[2k]{m+1}=\sqrt[2k]{m\left(1+\frac{1}{m}\right)}=\sqrt[2k]{m}\left\{1+\frac{1}{2km}+\frac{\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2k}-1\right)}{2!m^2}+\frac{\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2k}-1\right)\left(\frac{1}{2k}-2\right)}{3!m^3}+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2k}-1\right)\left(\frac{1}{2k}-2\right)\left(\frac{1}{2k}-3\right)}{4!m^4}+\ldots+\frac{\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2k}-(2p-2)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot m^{2p-1}}+$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2k}-(2p-2)\right]\cdot\left[\frac{1}{2k}-(2p-1)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot2p\cdot m^{2p}}+\ldots\right\}.$$

Покажем, что каждый положительный член ряда больше модуля следующего за ним отрицательного члена, т.е.

$$\frac{\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2k}-(2p-2)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)m^{2p-1}}>\left|\frac{\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2k}-1\right)\ldots\left[\frac{1}{2k}-(2p-2)\right]\left[\frac{1}{2k}-(2p-1)\right]}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2p-1)2pm^{2p}}\right|,$$

что равносильно $1>\frac{\left|\frac{1}{2k}-(2p-1)\right|}{2pm}$ или $\frac{2p-1-\frac{1}{2k}}{2pm}<1,$ а это уже очевидно при $m\geq1.$

Следовательно,

$$\sqrt[2k]{m+1}>\sqrt[2k]{m}\left(1+\frac{1}{2km}-\frac{2k-1}{8m^2k^2}\right).$$

Вернемся к доказательству неравенства (7). Поскольку (см. подраздел 3)

$$\frac{\lambda^{2k-1}b^{m+1}}{(\lambda^{2k}+b)^{m+1}}\leq\left[\frac{b(2k-1)}{4k(m+1)}\right]^{\frac{2k-1}{2k}},$$

то вместо (7) докажем более сильное неравенство

$$\left[\frac{b(2k-1)}{4k(m+1)}\right]^{\frac{2k-1}{2k}}\cdot\frac{1}{b}\leq b^{-\frac{1}{2k}}\,2km^{\frac{1}{2k}}\left[\frac{1}{2km}-\frac{2k-1}{8k^2m^2}\right]. \tag{8}$$

Преобразуем последнее неравенство

$$\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\cdot2^{-\frac{2k-1}{2k}}(m+1)^{-\frac{2k-1}{2k}}\leq m^{\frac{1}{2k}}\cdot2k\cdot\frac{1}{2km}\left(1-\frac{2k-1}{4km}\right).$$

Поскольку $\left(\frac{2k-1}{2k}\right)^{\frac{2k-1}{2k}}<1$, то докажем более сильное неравенство

$$1\leq2^{\frac{2k-1}{2k}}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\left(1-\frac{2k-1}{4km}\right),\; m\geq1.$$

При $k\geq1,\; m\geq1$ имеем

$$2^{\frac{2k-1}{2k}}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{2k-1}{2k}}\left(1-\frac{2k-1}{4km}\right)\geq2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{4}>1.$$

Значит, неравенство (8) выполняется, и тем более справедливо неравенство (7). Таким образом, для $n \ge 1$ справедлива оценка (6), т.е. $g_n(\lambda) \le 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}$. Отсюда

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}\delta,\ n \ge 1.$$

Поскольку $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \left\|x - x_n\right\| + \left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \left\|x - x_n\right\| + 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}\delta$ и $\left\|x - x_n\right\| \to 0$, при $n \to \infty$, то для сходимости метода (3) достаточно выбирать n зависящим от δ, чтобы $n^{\frac{1}{2k}}\delta \to 0$ при $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Теорема 2 доказана.

5. Оценка погрешности метода и её оптимизация.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le \left\|x - x_n\right\| + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\| \le \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{\frac{s}{k}}\|z\| + 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}\delta,\ n \ge 1. \qquad (9)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если решение* x *уравнения* (1) *истокообразно представимо* (4), *то при условии* $b > 0$ *для метода* (3) *справедлива оценка погрешности* (9).

Для минимизации полученной оценки погрешности вычислим правую часть оценки (9) в точке, в которой производная от неё равна нулю, в результате получим априорный момент останова:

$$n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2s}{2s+1}}\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{2(s+k)}{2s+1}} b\,\|z\|^{\frac{2k}{2s+1}}\delta^{-\frac{2k}{2s+1}}. \qquad (10)$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (9), имеем

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+2s)\left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-2k)}{k(1+2s)}} 2^{-\frac{s}{k(2s+1)}}\|z\|^{\frac{1}{2s+1}}\delta^{\frac{2s}{2s+1}}. \qquad (11)$$

Итак, доказана

Теорема 4. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3) *имеет вид* (11) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (10).

Замечание 1. *Оценка погрешности* (11) *имеет порядок* $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$, *и, как следует из* [2], *он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^{2s}z$, $s > 0$.

Замечание 2. *Оптимальная оценка* (11) *не зависит от итерационного параметра* b, *но от* b *зависит* $n_{опт}$. *Поэтому для уменьшения объёма вычислительной работы следует брать* b *удовлетворяющим условию* $b > 0$, *и так, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно выбрать*

$$b_{опт} = 2^{\frac{2s}{2s+1}}\left(\frac{s}{k}\right)^{-\frac{2(s+k)}{2s+1}}\|z\|^{-\frac{2k}{2s+1}}\delta^{\frac{2k}{2s+1}}.$$

Сравнение метода (3) с широкоизвестным явным методом итераций [1–6]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta} = 0 \qquad (12)$$

показывает, что порядки их совпадают. Достоинство явных методов в том, что они не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (12) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод обладает следующим важным достоинством: в явном методе (12) на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) на $b > 0$ нет ограничений сверху, в связи с чем оптимальную оценку погрешности для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

Неявный метод (3) в отличие от метода (12) позволяет решать уравнение (1) с неограниченным и притом необязательно положительным оператором.

6. Погрешность в счёте

Рассмотрим погрешность метода (3) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3), а z_n – значение с учётом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = \left(A^{2k} + B\right)^{-1}\left(Bz_n + A^{2k-1}y_\delta\right) + \frac{1}{b}\gamma_n,\ z_0 = 0, \qquad (13)$$

где γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (13) равенство (3). Имеем $\varepsilon_{n+1} = \left(A^{2k} + B\right)^{-1} B\varepsilon_n + \frac{1}{b}\gamma_n$, $\varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(A^{2k} + B\right)^{-(n-1-i)} B^{n-1-i}\,\frac{1}{b}\gamma_i .$$

Так как $b > 0$ и $0 \in SpA$, то $\left\|\left(A^{2k} + B\right)^{-1} B\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le \frac{n}{b}\gamma$, $\gamma = \sup\limits_i |\gamma_i|$.

Таким образом, с учётом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le \left(\frac{bs}{2kn}\right)^{\frac{s}{k}}\|z\| + 2k\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2k}}\delta + \frac{n}{b}\gamma,\ n \ge 1.$$

Замечание 3. *Для решения операторного уравнения* (1) *с несамосопряжённым или неположительным, но ограниченным оператором* A *можно перейти к уравнению* $A^*Ax = A^*y$. *Тогда при приближённом элементе* y_δ *метод* (3) *примет вид*

$$\left(\left(A^*A\right)^{2k} + B\right)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + (A^*A)^{2k-1}A^*y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N .$$

Предложенный метод может быть применён для решения прикладных некорректных задач, которые встречаются в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов, диагностике плазмы, сейсмике и медицине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.

2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

3. Константинова, Я.В. Оценки погрешностей в методе итераций для уравнений I рода / Я.В. Константинова, О.А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1973. – № 1. – С. 9–15.

4. Самарский, А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

5. Лаврентьев, М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.

6. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – М. : МГУ, 1994. – 207 с.

***O.V. Matysik.* The Method of Iterations Implicit Type for Solutions of Linear Equations with an Unbounded Operator.**

For the solution of operator equations with an unbounded linear and self-conjugate operator in the Hilbert space is proposed implicit iteration method. The convergence of the method in the original norm of the Hilbert space with accurate and approximate the right parts of the equation is proved. Obtained a priori estimates of the error of the method, they are optimized. Comparison of estimates of the error of the implicit method and an explicit method of simple iteration.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 22.02.2013