УДК 517.518.948

В.М. Мадорский

О ЧАСТИЧНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ С НЕГЛАДКИМ ОПЕРАТОРОМ

В работе рассматриваются нелокальные частично регуляризованные сверхлинейные итерационные процессы для решения уравнения $f(x)=0$ в пространстве R^n. Ряд предлагаемых к рассмотрению методов сходится к решению уравнения локально с кубической скоростью. Процессы сходятся высокоточно к решению операторного уравнения с «плохого» начального приближения.

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$f(x)=0;\ f\in\left(D\subset R^n\to R^n\right) \tag{1}$$

В работе [2] был исследован нерегуляризованный полулокальный итерационный процесс с непрерывным оператором и доказана его локальная кубическая скорость сходимости. Однако рассмотренный в [2] итерационный процесс имеет тот недостаток, что в рассматриваемой области $\overline{S}(x_0,r)$ должен был быть равномерно ограничен оператор, обратный оператору первой разделенной разности оператора $f(x)$. В настоящей работе мы попытаемся избавиться от этого обременительного условия.

Относительно оператора f полагаем, что $f\in C_D$, и $\left\|\left[\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2E+f(x_n,z_n)\right]^{-1}\right\|\le B,\ x_n,z_n\in D$.

Для решения уравнения (1) используем следующий итерационный процесс:

<u>Шаг 1</u> $$\left(\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2E+f(x_n,z_n)\right)\Delta y_n=-f(x_n); \tag{2}$$

$$y_n=x_n+\Delta y_n,\ z_n=x_n-\beta_n f(x_n),\ \beta_0\in[1e-3,1e-1].$$

<u>Шаг 2</u> $$\left(\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2E+f(x_n,z_n)\right)\Delta x_n=-\beta_n\left(f(x_n)+\beta_n f(y_n)\right). \tag{3}$$

<u>Шаг 3</u> $$x_{n+1}=x_n+\Delta x_n. \tag{4}$$

<u>Шаг 4</u> if $\|f(x_{n+1})\|\le\varepsilon<<1$ GO TO выход

$$\text{else } \beta_{n+1}=\min\left(1,\frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right),\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|},\ \gamma_0=\beta_0^2 \tag{5}$$

и GO TO шаг 1.

Начнем доказательство с проверки релаксационности процесса (2)–(5), для чего предварительно найдем некоторые оценки. Используя теорему о среднем для непрерывных операторов $\|f(x)\|\le\|f(y)+f(y,z)(x-y)\|+k\|x-y\|\|x-z\|$, имеем

$$\|f(y_n)\|\le\|f(x_n)+f(x_n,z_n)(y_n-x_n)\|+k\|y_n-x_n\|\|y_n-z_n\|=$$

$$=\left\|f(x_n)+\left(\left(\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2E+f(x_n,z_n)\right)-\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2E\right)(y_n-x_n)\right\|+ \tag{6}$$

$$+K\|y_n-x_n\|\|y_n-z_n\|\le\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2\|\Delta y_n\|+K\|\Delta y_n\|\|\Delta y_n+\beta_n f(x_n)\|\le$$

$$\le \alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^3 B + KB\|f(x_n)\| * \left\| -\left[\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 E + f(x_n,z_n)\right]^{-1} f(x_n) + \beta_n f(x_n)\right\| \le$$

$$\le \alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^3 B + KB^2\|f(x_n)\|^2 * \left\|E - \beta_n\left(\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2 E\right)\right\| =$$

$$= \alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^3 B + KB^2\|f(x_n)\|^2 C = \gamma_n\|f(x_n)\|^2.$$

Здесь введены оценки

$$\left\|E - \beta_n\left(\alpha\beta_n^2\|f(x_n)\|^2\right)E\right\| \le C,$$

$$\gamma_n = \alpha\beta_n^2\|f(x_n)\| + KB^2C < \alpha\beta_n\|f(x_n)\| + KB^2C = \gamma.$$

С учетом оценки (6) и теоремы о среднем, имеем:

$$\begin{aligned}
&\|f(x_{n+1})\| \le \|f(x_n) + f(x_n,z_n)(x_{n+1}-x_n)\| + K\|x_{n+1}-x_n\|\|x_{n+1}-z_n\| = \\
&= \left\|f(x_n) + \left(\alpha\beta_n{}^2\|f(x_n)\|^2 E + F(x_n,z_n) - \alpha\beta_n{}^2\|f(x_n)\|^2 E\right)(x_{n+1}-x_n)\right\| + \\
&+ K\|\Delta x_n\|\|x_{n+1}-x_n+\beta_n f(x_n)\| \le \alpha\beta_n{}^2\|f(x_n)\|^2\|\Delta x_n\| + \\
&+ \left\|f(x_n) - \beta_n f(x_n) - \beta_n{}^2 f(y_n)\right\| + K\|\Delta x_n\| * \\
&* \left\|\left[\alpha\beta_n{}^2\|f(x_n)\|^2 E + f(x_n,z_n)\right]^{-1}\left(-\beta_n f(x_n) - \beta_n{}^2 f(y_n)\right) + \beta_n f(x_n)\right\| \le \\
&\le (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + \beta_n^2\|f(y_n)\| + K\|\Delta x_n\| * \\
&* B\left\|\beta_n f(x_n) + \beta_n{}^2 f(y_n) - \beta_n f(x_n)\left[\alpha\beta_n{}^2\|f(x_n)\|^2 E + f(x_n,z_n)\right]\right\| = \\
&= (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + \beta_n^2\|f(y_n)\| + K\|\Delta x_n\| + K\|\Delta x_n\|\beta_n\|f(x_n)\| * \\
&* B\left\|\left(E + \beta_n\gamma_n\|f(x_n)\|\right) - \left[\alpha\beta_n{}^2\|f(x_n)\|^2 E + f(x_n,z_n)\right]\right\| \le \\
&\le (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + \beta_n^2\gamma_n\|f(x_n)\|^2 + K\|\Delta x_n\|B\left(\beta_n\gamma_n\|f(x_n)\| + C\right)\beta_n\|f(x_n)\|
\end{aligned} \tag{7}$$

Так как $\|\Delta x_n\| \le B\left(\beta_n\|f(x_n)\| + \beta_n{}^2\|f(y_n)\|\right)$, окончательно имеем (8)

$$\begin{aligned}
&\|f(x_{n+1})\| \le (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + \beta_n^2\gamma\|f(x_n)\|^2 + \\
&+ KB^2\left(\beta_n\|f(x_n)\| + \beta_n^2\gamma\|f(x_n)\|^2\beta_n\|f(x_n)\|\left(\beta_n\gamma\|f(x_n)\|\right) + C\right) = \\
&= (1-\beta_n)\|f(x_n)\| + \beta_n^2\|f(x_n)\|^2 * \\
&* \left(\gamma + KB^2\left(\beta_n\|f(x_n)\| + \gamma\beta_n\|f(x_n)\|\left(\gamma\beta_n\|f(x_n)\|\right) + C\right)\right) = \\
&= \left(1 - \beta_n(1-\varepsilon_n)\right)\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$\varepsilon_n = \beta_n\|f(x_n)\|D;\ \gamma + KB^2\left(\beta_n\|f(x_n)\| + \gamma\beta_n\|f(x_n)\|\left(\gamma\beta_n\|f(x_n)\|\right) + C\right) \le D.$$

Из (5) имеем, что

$$\beta_{n+1}\|f(x_{n+1})\| = \beta_n\|f(x_n)\|;\ n = 0,1. \tag{9}$$

Тогда из последнего соотношения следует, что $\varepsilon_i = \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \beta_0 \left\| f\left(x_0\right) \right\| D$. Если $\varepsilon_0 < 1$, а этого всегда можно добиться за счет выбора β_0, то все $\varepsilon_i < 1$ и $q_i < 1$.

Так как из (8) следует при $n = 0$, что $\left\| f\left(x_1\right) \right\| \le q_0 \left\| f\left(x_0\right) \right\|$, $q_0 < 1$, а из (9) при $n = 0$ $\beta_i \left\| f\left(x_1\right) \right\| \le \beta_0 \left\| f\left(x_0\right) \right\|$, то $\beta_i > \beta_0$, тогда

$$q_1 = 1 - \beta_1 \left(1 - \varepsilon_1\right) = 1 - \beta_i \left(1 - \varepsilon_0\right) < q_0 .$$

Применяя метод математической индукции, получим, что последовательность итерационных параметров $\left\{q_i\right\}$, монотонно убывая, стремится к нулю.

Переходя к пределу в (8) при $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f\left(x_{n+1}\right) \right\| \le \lim_{n \to \infty} \prod_{i=0}^{n} q_i \left\| f\left(x_0\right) \right\| = 0 . \tag{10}$$

Из (10) следует, что последовательность элементов x_i, порождаемых процессом (2)–(5), стремится к x^* – решению уравнения (1), если такое решение в D существует.

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1], [2], показываем, что существует такой номер n_0, что для $i > n_0$ все β_i становятся равными единице.

Пусть β_i становятся равными единице, тогда операторы $\alpha \beta_n^2 \left\| f\left(x_n\right) \right\|^2 E + f\left(x_n, z_n\right)$ вблизи решения становятся близкими к операторам первой разделенной разности $f\left(x_n, z_n\right)$ и, как показано в работе [2], процесс шаг 1 – шаг 4 переходит в процесс с кубической скоростью сходимости.

На основе вышеизложенного может быть сформулирована теорема.

Теорема.

Пусть в интересующей нас области D x^* – решение уравнения (1) с непрерывным оператором f существует. Тогда, если начальное приближение x_0 и начальная шаговая длина β_0 таковы, что $\varepsilon_0 = \beta_0 \left\| f\left(x_0\right) \right\| D < 1$, итерационный процесс (2)–(5) со сверхлинейной (локально с кубической скоростью) сходится к x^*.

Вполне аналогично тому, как это было сделано в работах [1], [2], показывается, что все элементы x_i, y_i, z_i, участвующие в итерационном процессе (2)–(5), не выходят за пределы сферы $\overline{S}\left(x_0, r\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест : БрГУ, 2005. – 186 с.

2. Мадорский, В.М. Нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы, локально сходящиеся с кубической скоростью / В.М. Мадорский // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 89–95.

***V.M. Madorski.* Nonlocal in Part Regulariside Iterative Processes Locally Converse with Cubic Speed**

Unlocal superlinear in part reguliside iterative processes for the solution of $f(x) = 0$ equation in space R^n are considered in the article. A number of suggested methods meet locally with cubic speed. The processes converge to exact solution of the operator equation from the «bad» initial approximation.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 29.04.2013