УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Для решения линейных операторных уравнений I рода с ограниченным положительным и несамосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для этого метода обосновывается применение правила останова по соседним приближениям, что делает предложенный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – оператор положительный ограниченный несамосопряженный. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha^2 \left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1} \left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2 x_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1} A^* y\right], \ x_0 \in H, k \in N. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод итераций (2) примет вид

$$\begin{aligned} z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 \left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1} \left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2 z_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1} A^* y_\delta\right] + \\ + \left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2 \left(E + \alpha^2 \left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1} u_n, \ z_0 \in H, \ k \in N, \end{aligned} \tag{3}$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha^2 \left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1} \left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^2$, $B = \left(E + \alpha^2 \left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1} 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1} A^*$. Тогда итерационный метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n. \tag{4}$$

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора A. Там показано, что при условии $\alpha > 0$ метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{1/k}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to \infty$. В предположении, что точное решение x уравнения (1) истокопредставимо, получена априорная оценка погрешности и априорный момент останова.

2. Правило останова по соседним приближениям

В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2; 3]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями

$$\left.\begin{aligned} &\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ &\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

Лемма 1. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0, \ \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n, \ n \ge 0. \tag{6}$$

Тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$.

Доказательство.

Из (6) имеем при $n = k$ $\quad Cu_k = \omega_{k+1} - C\omega_k - By$. Отсюда, используя равенство $A^*Ax = A^*y$, получим

$$u_k = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}By = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - \left(E + \alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-2}\left(E + \right.$$

$$\left. + \alpha^2\left(A^*A\right)^{2k}\right)^{-1} 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - 2\alpha\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-2}\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y =$$

$$= C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - 2\alpha\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-2}\left(A^*A\right)^k x = C^{-1}\omega_{k+1} - \omega_k - C^{-1}(E - C)x =$$

$$= C^{-1}(\omega_{k+1} - x) - (\omega_k - x).$$

Обозначим $\Delta_k = \omega_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - \\ &- 2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}, \ n \ge 1. \tag{8}$$

Покажем, что $(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k$, $k \ge 0$. Имеем $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, тогда $\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$, $\omega_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \omega_{k+1} - x$, отсюда следует, что

$$(E - C)\Delta_k = \omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k, \ k \ge 0. \tag{9}$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (7) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$=-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,C\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)+$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}=-(\Delta_0,\Delta_0)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)+\gamma_n,$$

где $\gamma_n=2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Нетрудно показать, что $\gamma_n\geq 0$ при любых $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$. Тогда $\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)$. Используя равенство (9), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2,$$

откуда $\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\leq\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При* $\forall\omega_0\in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\|\leq\beta$, *выполнено неравенство*

$$\varliminf_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|\leq 2\|C\|\beta. \tag{10}$$

Доказательство.

$$\varliminf_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|\leq\varliminf_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}+Cu_n\|+\|C\|\beta\leq\|C\|\beta+$$

$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\|C\|\beta+\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{1}{n}\|\omega_0-x\|^2+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\frac{1}{n}\|\omega_0-x\|^2+\frac{1}{n}n\|C\|^2\beta^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\|C\|\beta=2\|C\|\beta,$$

так как $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\|\omega_0-x\|^2=0$. Отсюда следует (10). Лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y-y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0\in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y-y_\delta\|\leq\delta$, $\|u_n\|\leq\beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0, \quad \delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0.$

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{11}$$

При $n=1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$, из (11) получим то же самое, т. е. при $n=1$ формула (11) верна. Предположим, что (11) верна при $n = p$, т.е. $z_p = C^p z_0 + C\sum\limits_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)$, и докажем её справедливость при $n = p+1$. Имеем

$$z_{p+1} = Cz_p + By_\delta + Cu_p = C\left(C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)\right) + By_\delta + Cu_p =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C^2\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-1} + By_\delta + Cu_{p-2} + CBy_\delta + C^2 u_{p-3} + \ldots + \right.$$

$$\left. + C^{p-2}By_\delta + C^{p-1}u_0\right) + By_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 + C\left(By_\delta + Cu_{p-1} + \right.$$

$$\left. + CBy_\delta + C^2 u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}By_\delta + C^p u_0 + C^{-1}By_\delta + u_p\right) =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (11) доказана. Отсюда

$$\omega_n = C^n\omega_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k(C^{-1}By + u_{n-k-1}) = C^n\omega_0 + (E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})By +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E - C)A^* y +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}(E - C^n)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$

$$= C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y - A^{-1}(E - C^n)y + A^{-1}(E - C^n)y_\delta +$$

$$+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k u_{n-k-1}-C^{n+1}\omega_0-A^{-1}(E-C^{n+1})y+A^{-1}(E-C^{n+1})y-A^{-1}(E-C^{n+1})y_\delta-$$

$$-C\sum_{k=0}^{n-1}C^k u_{n-k}=\omega_n-\omega_{n+1}+A^{-1}C^n(E-C)(y_\delta-y)=\omega_n-\omega_{n+1}+C^nB(y-y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n-z_{n+1}\|\le\|\omega_n-\omega_{n+1}\|+\left\|C^nB(y-y_\delta)\right\|. \tag{12}$$

Обозначим $\sigma=B(y-y_\delta)$, тогда

$$\left\|C^nB(y-y_\delta)\right\|=\left\|C^n\sigma\right\|=\left\|\int_0^M\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\sigma\right\|\le\left\|\int_0^{\varepsilon_0}\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\sigma\right\|+$$

$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^M\frac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^{2n}}{\left(1+\alpha^2\lambda^{2k}\right)^n}dE_\lambda\sigma\right\|\le\left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\|+q^n\|\sigma\|\to 0,\ n\to\infty,\ \varepsilon_0\to 0,$$

так как при $\alpha>0,\ \lambda\in(0,\mathrm{M}]$ имеем $\left|\dfrac{\left(1-\alpha\lambda^k\right)^2}{1+\alpha^2\lambda^{2k}}\right|\le q<1$. Поэтому (лемма 2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|z_n-z_{n+1}\|=\varliminf\limits_{n\to\infty}\|\omega_n-\omega_{n+1}\|\le 2\|C\|\beta.$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0\in H$ и любых $y_\delta,\|y-y_\delta\|\le\delta$ и u_n, $\|u_n\|\le\beta$.

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned}&\|\omega_n-\omega_{n+1}\|>\varepsilon-\|B\|\delta,\ (n<m'),\\&\|\omega_{m'}-\omega_{m'+1}\|\le\varepsilon-\|B\|\delta.\end{aligned}\right\}. \tag{13}$$

Из (12) следует, что $m\le m'$. Из леммы 1 при $n=m'$ получим неравенство $\sum\limits_{k=0}^{m'}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо записать $\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|\omega_k-\omega_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$. Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1}\left(\|\omega_k-\omega_{k+1}\|-\|C\|\beta\right)^2\le\|\omega_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2.$$

Так как по (13) при $n<m'$ имеем $\|\omega_n-\omega_{n+1}\|>\varepsilon-\|B\|\delta$, то $m'\left(\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\right)^2\le\|\omega_0-x\|^2+m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $\omega_0=z_0$ и $m\le m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m\le m'\le\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \quad (14)$$

Предположим, что (14) верно, тогда $x - C^n x = B\left(E + C + C^2 + ... + C^{n-1}\right)y$, $(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1} y$, $(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1} Ax$, $(E - C^n)x = (E - C^n)x$. Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (14) доказана. Из (11) вычтем (14), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \quad (15)$$

Отсюда $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n \Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n. \quad (16)$$

В частности, (16) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m \Delta_0\right\| \to 0, m \to \infty.$ Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0, \delta \to 0, \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ $m \to \infty, \delta \to 0, \beta \to 0$. Из (15) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \quad (17)$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha^2\left(A^* A\right)^{2k}\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^* A\right)^k\right)^2$ принадлежит [0,1], то можно доказать, что

$$\left\|C^n(E - C)\right\| \le \frac{1}{n+1}. \quad (18)$$

Поэтому из (17) получим при $n = m - 1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x)\right\| + \left\|C^{m-1} B(y_\delta - y)\right\| + \|Cu_{m-1}\| +$$

$$+ \left\|C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2}\right\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)\right\| \left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta +$$

$$+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ ([4]).

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \geq d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right), d > 1, p \in (0,1),$ то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \leq \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$. Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то $\varepsilon \leq \dfrac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$ Отсюда получим, что $m \leq \dfrac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$. Умножим обе части последнего равенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta,$ получим

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \leq \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\|\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}.$$

При $m \to \infty$ множитель $2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| \to 0,$ а

$$\frac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}$$

ограничена при $\delta, \beta \to 0$. Поэтому $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ при $m \to \infty,\ \delta,\ \beta \to 0$. Отсюда и из неравенства (16) при $m \to \infty$ $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|\Delta_m\| = \lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = \lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\left(\|C^m\Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)\right) = 0.$

Итак, доказано, что $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$ при $m \to \infty$, т.е. метод (3) с правилом останова (5) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. О приближенном решении операторных уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4: Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 93–101.

2. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

3. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

4. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука. – 1971. – 1108 с.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk. **About Decision Linear Equations with Non Self–Conjugate Operators of the Iteration Method**

In the Hilbert space for solving linear operator equations of type I with affirmative limited and non self–conjugate operator the non-explicit iteration method is proposed. The application of a rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. The convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.09.2012