

УДК 517.5

*И.В. Кальчук, А.О. Задорожный, Р.А. Маковий*

## ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ ДЛЯ ВЕЛИЧИН ОТКЛОНЕНИЙ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА ОТ ФУНКЦИЙ С КЛАССА ГЁЛЬДЕРА

При приближении функций класса Гельдера их интегралами Пуассона возникают асимптотические разложения, коэффициенты которых не представлены в явном виде. Этот вопрос решен с помощью дзета-функции Римана, что дает возможность находить точные значения констант Колмогорова – Никольского. Разработана прикладная программа, позволяющая вычислять константы заданного порядка малости.

### Гармонический и бигармонический интеграл как метод суммирования рядов Фурье

Пусть  $f(x)$   $2\pi$ -периодическая суммируемая функция и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

ее ряд Фурье. Пусть также  $\Lambda = \{\lambda_\rho(k)\}$  – множество функций натурального аргумента, зависящее от параметра  $\rho \in E_\Lambda \subset R$ , и при этом  $\lambda_\rho(0) = 1$ .

Каждой такой функции  $f(x)$ , исходя из ее разложения (1), поставим в соответствие ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k) (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (2)$$

Если ряд (2) при каждом  $\rho \in E_\Lambda$  является рядом Фурье некоторой непрерывной функции, то обозначим ее через  $U_\rho(f; x; \Lambda)$  и будем говорить, что множество  $\Lambda = \{\lambda_\rho(k)\}$  задает метод построения операторов  $U_\rho(f; x; \Lambda)$ .

Подставляя в (2) значения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$ , находим

$$U_\rho(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k) \cos kt \right) dt \neq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K(\rho; t) dt, \quad (3)$$

где  $K(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\rho(k) \cos kt$  – ядро оператора  $U_\rho(f; x; \Lambda)$ .

Если в формуле (3) положить  $\lambda_\rho(k) = \rho^k$ ,  $0 \leq \rho < 1$ , то получим

$$U_\rho(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_1(\rho; t) dt \neq P_\rho(f; x), \quad (4)$$

$$K_1(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt = \frac{1 - \rho^2}{2(\rho^2 - 2\rho \cos t + 1)},$$

а когда  $\lambda_\rho(k) = \left(1 + \frac{k}{2}(1 - \rho^2)\right) \rho^k$ ,  $0 \leq \rho < 1$ , то

$$U_\rho(f; x; \Lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_2(\rho; t) dt \neq B_\rho(f; x), \quad (5)$$

$$K_2(\rho; t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{k}{2} (1 - \rho^2) \right) \rho^k \cos kt = \frac{(1 - \rho^2)^2 (1 - \rho \cos t)}{2(\rho^2 - 2\rho \cos t + 1)^2}.$$

Величины (4) и (5) принято называть гармоническим [1–4] и бигармоническим [5–8] интегралом Пуассона функции  $f$  соответственно.

### Приближение функций класса Гёльдера

Пусть  $C$  – пространство  $2\pi$ -периодических функций, норма в котором задается при помощи равенства

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

Классом Гёльдера порядка 1 принято называть класс функций  $f \in C$ , для которых выполняется условие

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h|.$$

Обозначают этот класс  $H^1$ .

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; U_\rho(\Lambda))_C = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - U_\rho(f; x; \Lambda)\|_C,$$

где  $\mathfrak{M} \subseteq C$  – заданный класс функций,  $U_\rho(f; x; \Lambda)$  – операторы вида (3), будем называть, следуя А.И. Степанцу [9], задачей Колмогорова – Никольского. В нашем случае будем рассматривать две величины:

$$\mathcal{E}(H^1; P_\rho)_C \text{ и } \mathcal{E}(H^1; B_\rho)_C,$$

которые соответствуют величинам отклонений гармонического и бигармонического интегралов Пуассона от функций из класса  $H^1$ .

Если в явном виде найдена функция  $g(\rho) = g(\mathfrak{M}, \rho)$  такая, что при  $\rho \rightarrow 1-$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; U_\rho(\Lambda))_C = g(\rho) + o(g(\rho)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова – Никольского для оператора  $U_\rho(f; x; \Lambda)$  на классе  $\mathfrak{M}$  в метрике пространства  $C$ .

Формальный ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho)$  называется асимптотическим разложением или асимптотикой функции  $f(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 1-$ , если для произвольного натурального  $N$

$$f(\rho) = \sum_{n=0}^N g_n(\rho) + o(g_N(\rho)), \quad \rho \rightarrow 1-$$

и для всех  $n \in \mathbb{N}$

$$|g_{n+1}(\rho)| = o(|g_n(\rho)|).$$

Кратко это будем записывать следующим образом:

$$f(\rho) \cong \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\rho).$$

Вопрос об исследовании аппроксимативных свойств методов приближения интегралами Пуассона был и остается актуален для многих математиков.

Так, например, Э.Л. Штарк в работе [2] установил, что

$$\mathcal{E}(H^1; P_\rho)_C = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \beta_k (1-\rho)^k \right\}, \rho \rightarrow 1-,$$

$$\beta_k = \frac{1}{k} \left\{ \ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right\}, k = 1, 2, \dots$$

В работах [6] и [7] (независимо друг от друга) был получен следующий результат:

$$\mathcal{E}(H^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi} (1-\rho) + \frac{2}{\pi} (1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} + \frac{1+2\ln 2}{\pi} (1-\rho)^2 +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=3}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \gamma_k (1-\rho)^k \right\}, \rho \rightarrow 1-$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \left( \ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2^{-j}}{j} \right) - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-1}}.$$

Асимптотическое разложение величины  $\mathcal{E}(H^1; P_\rho)_C$  по степеням  $\frac{1}{\delta}$  ( $\delta = -\frac{1}{\ln \rho}$ ) найдено В.А. Баскаковым [3]:

$$\mathcal{E}(H^1; P_\delta)_C \cong \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\delta} \ln \delta + \frac{1}{\delta} \left[ \ln \pi + \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt \right] \right\} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[ \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt - \frac{1}{2k\pi^{2k}} \right] \frac{1}{\delta^{2k+1}},$$
(6)

где под символом  $(t)_{2\pi}$  понимают четное  $2\pi$ -периодическое продолжение функции  $\varphi(t) = t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

Асимптотическое разложение, которое формулируется как в терминах  $\frac{1}{\delta}$ , так и в терминах  $(1-\rho)$ , установлено Т.И. Амановым и Л.П. Фалалеевым в работе [8], а именно при  $\delta \rightarrow \infty$  ( $\rho \rightarrow 1-$ )

$$\mathcal{E}(H^1; B_\rho)_C = \frac{1-\rho^2}{\pi} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[ 2k \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt - \frac{1}{\pi^{2k}} \right] \frac{1}{\delta^{2k}} \right\} +$$

$$+ \left( \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1-\rho^2}{\pi} \right) \left\{ \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt + \ln \delta + \ln \pi + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{1}{2k\pi^{2k}} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2k+2}} dt \right) \frac{1}{\delta^{2k}} \right\}.$$
(7)

С полученных разложений (6) и (7) неизвестными оставались коэффициенты, где фигурирует  $2\pi$ -периодическое продолжение функции  $\varphi(t) = t$ .

В работе найдены значения выражений  $\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt$ , а именно:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} \frac{2i\pi - t}{t^{2(k+1)}} dt + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} \frac{t - 2i\pi}{t^{2(k+1)}} dt = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{2i\pi}{2k+1} \frac{1}{t^{2k+1}} + \frac{1}{2k} \frac{1}{t^{2k}} \right) \Big|_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{2k} \frac{1}{t^{2k}} + \frac{2i\pi}{2k+1} \frac{1}{t^{2k+1}} \right) \Big|_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{(2k+1)\pi^{2k}} \left[ \frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} - \frac{2}{(2i)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2k\pi^{2k}} \left[ \frac{2}{(2i)^{2k}} - \frac{1}{(2i-1)^{2k}} - \frac{1}{(2i+1)^{2k}} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся дзета-функцией Римана [10]

$$\zeta(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^z} \quad (9)$$

и равенством (9.535.1) [10]

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2k}} = \zeta(2k) - 2^{-2k} \zeta(2k). \quad (10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{2k+1} \left[ \frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] &= \frac{1}{2k+1} \sum_{i=1}^{\infty} (2i-1+1) \left[ \frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2i-1)^{2k}} + \frac{2i-1}{(2i+1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2k+1} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2i-1)^{2k}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k}} + \frac{1}{(2i-1)^{2k+1}} - \frac{1}{(2i+1)^{2k+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{2k+1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2i-1)^{2k}} + \frac{1}{(2i+1)^{2k}} \right] + 1 \right) = \frac{1}{2k+1} \left( 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2k}} \right) = \\ &= \frac{2}{2k+1} (\zeta(2k) - 2^{-2k} \zeta(2k)), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^{2k}} = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2i-1)^{2k}} - 1 \right) = \frac{1}{2k} (\zeta(2k) - 2^{-2k} \zeta(2k) - 1). \quad (12)$$

Используя (9), (10) и подставляя (11), (12) в (8), находим

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^{2(k+1)}} dt &= \frac{2}{(2k+1)\pi^{2k}} \left( \zeta(2k) - 2^{-2k} \zeta(2k) - \frac{1}{2^{2k}} \zeta(2k) \right) + \\ &+ \frac{1}{2k\pi^{2k}} \left( 2 \cdot \frac{1}{2^{2k}} \zeta(2k) - \zeta(2k) + 2^{-2k} \zeta(2k) - \zeta(2k) + 2^{-2k} \zeta(2k) + 1 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(2k+1)\pi^{2k}} \zeta(2k) [1 - 2^{-2k+1}] + \frac{2}{2k\pi^{2k}} \zeta(2k) [2^{-2k+1} - 1] + \frac{1}{2k\pi^{2k}} = \\
&= \frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k) [1 - 2^{-2k+1}] \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2k\pi^{2k}} = \\
&= \frac{1}{2k\pi^{2k}} - \frac{2\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k(2k+1)}. \tag{13}
\end{aligned}$$

В случае  $k=0$  находим

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} \frac{2i\pi - t}{t^2} dt + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} \frac{t - 2i\pi}{t^2} dt = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{2i\pi}{t} - \ln t \right) \Big|_{(2i-1)\pi}^{2i\pi} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \ln t + \frac{2i\pi}{t} \right) \Big|_{2i\pi}^{(2i+1)\pi} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left( -\frac{2i\pi}{2i\pi} + \frac{2i\pi}{(2i-1)\pi} - \ln(2i\pi) + \ln[(2i-1)\pi] + \ln[(2i+1)\pi] - \ln(2i\pi) + \frac{2i\pi}{(2i+1)\pi} - \frac{2i\pi}{2i\pi} \right) = \\
&= -2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{2i}{2i-1} + \frac{2i}{2i+1} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \ln \frac{(2i-1)(2i+1)}{2i \cdot 2i} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{(2i)^2} \right) = 1 + \ln \prod_{i=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{(2i)^2} \right).
\end{aligned}$$

Учитывая, что (0.262.2) [10]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{(2k)^2} \right) = \frac{2}{\pi},$$

имеем

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}}{t^2} dt = 1 + \ln \frac{2}{\pi}. \tag{14}$$

При помощи (13) и (14) с (6) и (7) следует соответственно

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(H^1; P_{\rho})_C &\cong \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\delta} \ln \delta + \frac{1}{\delta} [1 + \ln 2] \right\} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^{2k}} \zeta(2k) \frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k(2k+1)} \frac{1}{\delta^{2k+1}}, \tag{15} \\
\mathcal{E}(H^1; B_{\rho})_C &\cong \frac{1 - \rho^2}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^{2k}} \zeta(2k) \frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k+1} \frac{1}{\delta^{2k}} \right\} + \\
&+ \left( \frac{2}{\pi} \frac{1}{\delta} - \frac{1 - \rho^2}{\pi} \right) \left\{ 1 + \ln 2 + \ln \delta + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^{2k}} \zeta(2k) \frac{1 - 2^{-2k+1}}{2k+1} \frac{1}{\delta^{2k}} \right\}, \tag{16}
\end{aligned}$$

где  $\zeta(2k)$  – дзета-функция Римана определена по формуле (9).

Чтобы иметь возможность находить значения коэффициентов разложения величин

$\mathcal{E}(H^1; P_{\rho})_C$  и  $\mathcal{E}(H^1; B_{\rho})_C$  по степеням  $\frac{1}{\delta}$  была разработана прикладная программа.



```

    return result;
}
public static double CalcBiHarm(double alpha, int infiniteSmall)
{
    double result = 0;
    switch (infiniteSmall)
    {
        case 1:
            if (alpha == 1)
                result = (4 / Math.PI);
            else
                result = (1 - 2 * alpha / Math.PI) / Math.Cos(alpha * Math.PI / 2);
            break;
        case 2:
            if (alpha == 1)
                result = (-2 / Math.PI) * (1 + Math.Log(2 * Math.E /
Math.Pow(Math.PI, 2))) + 2 / Math.PI * Math.Log((Math.Pow(Math.PI, 2) / (2 * Math.E)));
            else
                result = 4 / Math.PI * common_calc(alpha, 0);
            break;
        default:
            if (infiniteSmall % 2 == 0)
            {
                if ((infiniteSmall / 2) % 2 == 0)
                {
                    // четные
                    if (alpha == 1)
                    {
                        double IDiv2 = infiniteSmall / 2 ;
                        // result = (1/Math.PI)*Math.Pow(4*Math.E/infiniteSmall, infini-
teSmall/2)*(1/Math.Sqrt(Math.PI*infiniteSmall)) + (1/Math.PI)*summa2p(infiniteSmall) +
(2/Math.PI)*addition2(infiniteSmall);
                        result = 2 * Math.Pow(-1, IDiv2) * Math.Pow((2 * Math.E / IDiv2),
IDiv2) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * IDiv2)) + Math.Log(Math.PI) + 1 + 2 / Math.PI + (1 /
Math.PI) * summa2p(infiniteSmall) +(1 / Math.PI) * summa2p_sec(infiniteSmall);
                    }
                    else
                    {
                        result = (1 / Math.PI) * summa20p(infiniteSmall, alpha) + (1 /
Math.PI) * summa21p(infiniteSmall, alpha);
                    }
                }
                else // нечетные
                {
                    if (alpha == 1)
                    {
                        double IDiv2 = infiniteSmall / 2;
                        // result = (1 / Math.PI) * Math.Pow(4 * Math.E / infiniteSmall,
infiniteSmall / 2) * (1 / Math.Sqrt(Math.PI * infiniteSmall)) + (1 / Math.PI) * sum-
ma2p(infiniteSmall);
                    }
                }
            }
    }
}

```

```

        result = 2 * Math.Pow(-1, lDiv2) * Math.Pow((2 * Math.E /
IDiv2), lDiv2) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * lDiv2)) + Math.Log(Math.PI) + 1 + 2 / Math.PI
+ (1 / Math.PI) * summa2p(infiniteSmall) + (1 / Math.PI) * summa2p_sec(infiniteSmall);
    }
    else
    {
        result = (1 / Math.PI) * summa20p(infiniteSmall, alpha) + (1 /
Math.PI) * summa21p(infiniteSmall, alpha);
    }
}
}
else
{
    double lDiv2plus1 = infiniteSmall / 2 + 1;
    double comm_expr = Math.Pow(-1, lDiv2plus1) * Math.Pow((2 *
Math.E / lDiv2plus1), lDiv2plus1) * (1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI * lDiv2plus1));
    if (alpha == 1)
    {
        result = 1 / Math.PI * comm_expr;
    }
    else
    {
        result = 1 / Math.Cos(alpha * Math.PI / 2) * Math.Pow(-1, infi-
teSmall / 2 + 1) * Math.Pow((2 * Math.E / infiniteSmall / 2 + 1), infiniteSmall / 2 + 1) * (1 /
Math.Sqrt(2 * Math.PI * infiniteSmall / 2 + 1));
    }
}
break;
}
return result;
}
private static double zeta(double i)
{
    return math_fnc.Math.riemann_zeta(i);
}
// Функция подсчета для гармонического метода при alpha >= 3
private static double common_calc(double alpha, int k)
{
    double i2Kplus1minusAlpha = 2 * k + 1 - alpha;
    double zeta2K = zeta(2 * k);
    double zeta2Kplus1minusAlpha = zeta(i2Kplus1minusAlpha);
    double expr1 = (2-Math.Pow(2,2-
2*k))*zeta2K/((2*k+1)*Math.Pow(Math.PI,2*k));
    double expr2 = (2-Math.Pow(2,alpha-
2*k))*zeta2Kplus1minusAlpha/((2*k+1-alpha)*Math.Pow(Math.PI,2*k+1-alpha));
    // double expr1 = 2 / (2 * k + 1);
    // double expr2 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * k);
    // double expr3 = -1 * Math.Pow(2, -2 * k) * zeta2K - 2 * zeta2K -
Math.Pow(2, 1 - 2 * k) * zeta(2 * k + 1);
    // double expr4 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * k);

```



```

// double expr5 = 1 / Math.Pow(Math.PI, 2 * i2Kplus1minusAlpha);
// double expr6 = Math.Pow(2, 2 - 2 * k) * zeta2Kplus1minusAlpha - 2 - 4 *
zeta2Kplus1minusAlpha - Math.Pow(2, 1 + alpha - 2 * k) * zeta2Kplus1minusAlpha;
return expr1 * expr2;
}
private static double common_calc1 (int k)
{
double zeta2K = zeta(2 * k);
double expr1 = ((2-Math.Pow(2,2-2*k))/(Math.Pow(Math.PI,2*k)))*zeta2K*(-
1)/(2*k*(2*k+1));
return expr1;
}
private static double summa_common(int n, int k)
{
double nDiv2minus2k = (n / 2 - 2 * k);
return Math.Pow(-1, (n / 2 - k + 1)) * Math.Pow((2 * Math.E / nDiv2minus2k),
nDiv2minus2k) * (1 / Math.Sqrt((n - 4 * k) * Math.PI));
}
private static double summa_common20(int n, int k, double alpha)
{
return (-1)*summa_common(n, k) * common_calc(alpha, k);
}
private static double summa_common2(int k)
{
return common_calc1(k);
}
private static double summa2np(int n)
{
double summ = 0;
for (int k = 1; k <= (n / 4); k++)
{
summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
}
return summ;
}
private static double summa2p(int n)
{
double summ = 0;
for (int k = 1; k <= (n/4-3/2); k++)
{
summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
}
return summ;
}
private static double summa2p_sec(int n)
{
double summ = 0;
for (int k = 1; k <= (n/4 - 2); k++)
{
summ += summa_common(n, k) * summa_common2(k);
}
}

```

```

    }
    // summ += summa_common2(n / 4);
    return summ;
}
private static double addition2(int n)
{
    double zetanNa2 = zeta(n/2);
    return ((Math.Pow(-1, n / 4 + 1)) / (n / 2 + 1) * Math.Pow(Math.PI, n / 2)) *
(Math.Pow(2, -n / 2) * zetanNa2 + 2 * zetanNa2 - Math.Pow(2, 1 - n / 2) * zetanNa2 + 1) - (4
/ (n * Math.Pow(Math.PI, n / 2))) * (1 + 2 * zetanNa2);
}
private static double summa20p(int n, double alpha)
{
    double summ = 0;
    for (int k = 0; k <= (n / 4 - 2); k++)
    {
        summ += summa_common20(n, k, alpha);
    }
    summ += common_calc(alpha, n / 4);
    return summ;
}
private static double summa21p(int n, double alpha)
{
    double summ = 0;
    for (int k = 0; k <= (n / 4 - 1); k++)
    {
        summ += 2*k * summa_common20(n, k, alpha);
    }
    summ += common_calc(alpha, n / 4);
    return summ;
}
private static double summa20np(int n, double alpha)
{
    double summ = 0;
    for (int k = 0; k <= (n / 4); k++)
    {
        summ += summa_common20(n, k, alpha);
    }
    return summ;
}
private static double summa21np(int n, double alpha)
{
    double summ = 0;
    for (int k = 0; k <= (n / 4); k++)
    {
        summ += 2 * k * summa_common20(n, k, alpha);
    }
    return summ;
}
}
}

```

}

Таким образом, мы получили возможность при заданном порядке малости на основании (15) и (16) вычислять константы Колмогорова – Никольского для асимптотических разложений величин  $\mathcal{E}(H^1; P_\rho)_C$  и  $\mathcal{E}(H^1; B_\rho)_C$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натансон, В.П. О порядке приближения непрерывной  $2\pi$ -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – 72, № 1 – С. 11–14.
2. Штарк, Э.Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из  $Lip_1$  от их сингулярного интеграла Абея – Пуассона / Э.Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – 13, № 1. – С. 21–28.
3. Баскаков, В.А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абея – Пуассона / В.А. Баскаков // Мат. заметки. – 1975. – 17, № 2. – С.169–180.
4. Zhyhallo, K.M. Complete Asymptotics of the Deviation of a Class of Differentiable Functions from the Set of Their Harmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №1. – P. 51–63.
5. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.
6. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонений функций из  $Lip_1$  от одного сингулярного интеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (Материалы всесоюз. симп.). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.
7. Zhyhallo, K.M. Approximation of Differentiable Periodic Functions by Their Biharmonic Poisson Integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – 54, №9. – P. 1462–1470.
8. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абея – Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // 5-е советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики ; Алма-Ата, 1976. – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.
9. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Киев : Наук. думка, 1981. – 340 с.
10. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

***I.V. Kalchuk, A.O. Zadorozhnyi, R.O. Makovij. Exact Constants for the Poisson Integral Deviations Values from the Functions Class of Hölder***

When approximating the functions from class  $H^1$  there appear the asymptotic expansions, whose coefficients are not expressed in explicit form. This problem has been solved by the instrumentality of Riemann zeta-function, which gives the possibility to find the exact values of Kolmogorov-Nikolskiy constants. The program that allows us to find the constants of given infinitesimal order has been developed.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 01.06.2012