УДК 517.5

Ю.Зайонц, Ю.И. Харкевич, Т.А. Степанюк

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА БИГАРМОНИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА КЛАССАХ H_ω

В работе проведено исследование вопросов о приближении функций классов $H_\omega := \left\{\varphi \in C : |\varphi(t)-\varphi(t')| \le \omega\left(|t-t'|\right) \ \forall t, t' \in \mathbb{R}\right\}$, с помощью бигармонических интегралов Пуассона $B_\delta(f;x)$. Решена задача Колмогорова–Никольского для бигармонических интегралов Пуассона на классах H_ω в равномерной метрике.

1. Решение бигармонического уравнения для единичного круга

Пусть $U(\rho; f; x)$ – бигармоническая функция в круге радиуса r_0 с центром в начале координат, т.е. она является решением уравнения

$$\Delta\left(\Delta U(\rho; f; x)\right) = 0, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах.

Рассмотрим уравнение (1) с заданными граничными условиями

$$U(\rho; f; x)\Big|_{\rho=r_0} = f(x), \quad \frac{\partial U(\rho; f; x)}{\partial \rho}\Bigg|_{\rho=r_0} = g(x), \tag{2}$$

и будем искать бигармоническую функцию, удовлетворяющую при $\rho = r_0$ граничным условиям (2). Можно показать [1, с. 400], что искомую функцию можно представить в виде суммы

$$U(\rho; f; x) = \left(\rho^2 - r_0^2\right) u_1(\rho; x) + u_2(\rho; x), \tag{3}$$

где $u_1(\rho; x)$ и $u_2(\rho; x)$ – гармонические функции. Из граничных условий находим:

$$u_2(\rho; x)\Big|_{\rho=r_0} = f(x).$$

Отсюда видно, что функция $u_2(\rho; x)$ есть решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа и может быть представлена с помощью интеграла Пуассона:

$$u_2(\rho; x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(r_0^2 - \rho^2\right) f(t)}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x)} dt. \tag{4}$$

Из второго граничного условия получаем:

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\partial u_2}{\partial \rho}\Bigg|_{\rho=r_0} = h(x).$$

Нетрудно убедиться непосредственным дифференцированием, что функция

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\rho}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial \rho}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому может быть выражена интегралом Пуассона:

$$2r_0 u_1(\rho; x) + \frac{\rho}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial \rho} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(r_0^2 - \rho^2\right) g(t)}{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(t-x)} dt. \tag{5}$$

Продифференцировав (4) по ρ и подставляя значение $\dfrac{\partial u_2}{\partial \rho}$ в формулу (5), найдем $u_1(\rho;x)$. Заменяя в формуле (3) $u_1(\rho;x)$ и $u_2(\rho;x)$ их выражениями, получим:

$$U(\rho;f;x)=\frac{1}{2\pi r_0}\left(\rho^2-r_0^2\right)^2\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{-g(t)}{\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos(t-x)}dt+\int_0^{2\pi}\frac{f(t)(r_0-\rho\cos(t-x))}{\left(\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos(t-x)\right)^2}dt\right]. \quad (6)$$

Если же рассмотреть случай единичного круга ($r_0=1$) и следующие краевые условия

$$U(\rho;f;x)\big|_{\rho=1}=f(x),\quad \left.\frac{\partial U(\rho;f;x)}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=0, \quad (7)$$

то, как следует из равенства (6), решением краевой задачи (1) и (7) будет величина

$$B_\rho(f;x):=\frac{\left(1-\rho^2\right)^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\frac{1-\rho\cos t}{\left(\rho^2-2\rho\cos t+1\right)^2}dt,\qquad 0<\rho<1,$$

которую принято называть бигармоническим интегралом Пуассона.

Положив $\rho=e^{-\frac{1}{\delta}}$, бигармонический интеграл Пуассона запишем в виде

$$B_\delta(f;x)=\frac{1}{2\pi}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2\int_0^{2\pi}f(x+t)\frac{1-e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t}{\left(e^{-\frac{2}{\delta}}-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t+1\right)^2}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)K_\delta(t)dt,\quad \delta>0, \quad (8)$$

где $K_\delta(t):=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2\dfrac{1-e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t}{\left(e^{-\frac{2}{\delta}}-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t+1\right)^2}=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{k}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt$ – ядро бигармонического интеграла Пуассона.

2. Постановка задачи и некоторые исторические сведения, касающиеся данного вопроса исследования

Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций, в котором норма задается при помощи равенства

$$\|f\|_C=\max_t|f(t)|.$$

Модулем непрерывности функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$ [2, с. 12] называют функцию $\omega(t)=\omega(f,t)$, определенную для $t\in[0;b-a]$ при помощи равенства:

$$\omega(t)=\omega(f,t)=\sup_{0\le h\le t}\max_{a\le x\le b-h}\left|f(x+h)-f(x)\right|=\sup_{\substack{|x'-x''|\le t,\\ x',x''\in[a,b]}}\left|f(x')-f(x'')\right|.$$

Пусть $\omega=\omega(t)$ – произвольный фиксированный модуль непрерывности. Говорят, что функция $f(x)\in C$ принадлежит к классу H_ω, если ее модуль непрерывности $\omega(f,t)$ удовлетворяет условию

$$\omega(f,t)\le\omega(t),$$

или каковы бы ни были точки $t_1,t_2\in\mathbb{R}$, справедливо

$$\left|f(t_1)-f(t_2)\right|\le\omega\left(\left|t_1-t_2\right|\right).$$

Через W^r обозначают множество 2π-периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и $\left|f^{(r)}(t)\right| \le 1$.

Задачу об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; B_\delta)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\| f(x) - B_\delta(f; x) \right\|_C,$$

где $\mathfrak{N} \subseteq C$ – заданный класс функций, будем называть, следуя А.И. Степанцу [2, с. 8], задачей Колмогорова–Никольского.

Если в явном виде найдена функция $g(\delta) = \varphi(\mathfrak{N}; B_\delta; \delta)$, такая, что при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta)),$$

то говорят, что решена задача Колмогорова–Никольского для бигармонического интеграла Пуассона B_δ на классе $\mathfrak{N}$ в метрике пространства C.

Аппроксимативные свойства метода приближения бигармоническими интегралами Пуассона на классах дифференцируемых функций исследовались многими учеными. В 1963 году С. Каниев в работе [3] установил для величины $\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C$ асимптотическое равенство при $\rho \to 1-$

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + \frac{\varepsilon_\rho}{\pi}, \quad \varepsilon_\rho = o(1-\rho). \tag{9}$$

В 1968 году P. Pych [4] уточнила результаты С. Каниева, получив следующее асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}(1-\rho) + O\left((1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho}\right), \qquad \rho \to 1-. \tag{10}$$

В 1976 году в работе Л.П. Фалалеева [5] было получено полное асимптотическое разложение для величины $\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C$ по степеням $(1-\rho)$

$$\mathcal{E}(W^1; B_\rho)_C = \frac{2}{\pi}\left\{(1-\rho) + (1-\rho)^2 \ln \frac{1}{1-\rho} + \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\right)(1-\rho)^2 + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=3}^{\infty}\left(\alpha_k (1-\rho)^k \ln \frac{1}{1-\rho} + \beta_k (1-\rho)^k\right)\right\}, \tag{11}$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{k}, \quad \beta_k = \frac{1}{k}\left(\ln 2 + \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i 2^i} - \frac{1}{(k-2)(k-1)2^{k-2}} - \frac{1}{(k-1)2^{k-1}}\right).$$

В 1976 году в работе Л.П. Фалалеева и Т.И. Аманова [6] были получены полные асимптотические разложения для величин $\mathcal{E}(W^1;\, B_\delta)_C$ и $\mathcal{E}(H^\alpha;\, B_\delta)_C$, которые формулируются одновременно как в терминах $\frac{1}{\delta}$ так и в терминах $1-\rho$, а именно при $\delta \to \infty$ $(\rho \to 1-)$

$$\mathcal{E}(W^1;\, B_\delta)_C = \frac{1-\rho^2}{\pi}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(2k\int_{\pi}^{\infty} \frac{(t)_{2\pi}\, dt}{t^{2k+2}} - \frac{1}{\pi^{2k}}\right)\frac{1}{\delta^{2k}}\right\} +$$
$$+\left(\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta} - \frac{1-\rho^2}{\pi}\right)\left\{\ln\delta + \ln\pi + \int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}\, dt}{t^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2k\pi^{2k}} - \int_{\pi}^{\infty}\frac{(t)_{2\pi}\, dt}{t^{2k+2}}\right)\frac{1}{\delta^{2k}}\right\}, \tag{12}$$

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};\,B_{\delta})_C=\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\delta^{\alpha}}-\frac{\alpha}{\delta^{\alpha-1}}\frac{1-\rho^2}{\pi}\right\}+\left\{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}-\frac{1-\rho^2}{\pi}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}\left[\int_{\pi}^{\infty}\frac{\left(t^{\alpha}\right)_{2\pi}dt}{t^{2k+2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(2k+1-\alpha)\pi^{2k+1-\alpha}}\right]+\frac{1-\rho^2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2k\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}\left[\frac{1}{(2k+1-\alpha)\pi^{2k+1-\alpha}}-\int_{\pi}^{\infty}\frac{\left(t^{\alpha}\right)_{2\pi}}{t^{\,2k+2}}dt\right],\quad(13)$$

где $\left(t^{\alpha}\right)_{2\pi}$ – четное 2π-периодическое продолжение функции $f(t)=t^{\alpha}$, $0\le t\le\pi$, на всю числовую ось.

Так же следует отметить ряд работ Ю.И. Харкевича, К.Н. Жигалло, Т.В. Жигалло и И.В. Кальчук [7–12], которые изучали аппроксимативные свойства бигармонического интеграла Пуассона на разных классах дифференцируемых функций.

Как следствие, из соотношений (9)–(13) вытекает справедливость асимптотических равенств:

$$\mathcal{E}(W^1;B_{\rho})_C=\frac{2}{\pi}(1-\rho)+O\left((1-\rho)^2\ln\frac{1}{1-\rho}\right),\qquad \rho\to 1-,\qquad(14)$$

$$\mathcal{E}(W^1;B_{\rho})_C=\frac{2}{\pi}(1-\rho)+\frac{2}{\pi}(1-\rho)^2\ln\frac{1}{1-\rho}+O\left((1-\rho)^2\right),\quad \rho\to 1-.\quad(15)$$

Аналогично из полного асимптотического разложения (13) вытекает асимптотическое равенство:

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};B_{\delta})_C=\frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^{1+\alpha}}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right),\quad \delta\to\infty.\qquad(16)$$

В тоже время аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона на классах H_{ω} не были исследованы. Поэтому возник вопрос об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней отклонения функций из классов H_{ω} от их бигармонических интегралов Пуассона в равномерной метрике.

Основной целью этой работы есть изучение асимптотического поведения величин

$$\mathcal{E}(H_{\omega};B_{\delta})_C=\sup_{f\in H_{\omega}}\left\|f(x)-B_{\delta}(f,x)\right\|_C,\qquad \delta\to\infty.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Для произвольного фиксированного модуля непрерывности* $\omega(t)$ *в принятых выше обозначениях справедливо равенство*

$$\mathcal{E}(H_{\omega};\,B_{\delta})_C=\frac{\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}{\pi}\int_0^{\pi}\omega(t)\frac{1-e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t}{\left(1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t+e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}dt,\qquad \delta>0.\qquad(17)$$

Доказательство.

Рядом с функцией $f(t)$ рассмотрим функцию $f_1(t):=f(t+x)$. Тогда $f_1(0)-B_{\delta}(f_1,0)=f(x)-B_{\delta}(f,x)$.

Так как функции $f(t)$ и $f_1(t)$ одновременно принадлежат классу H_{ω}, то делаем выводы, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{f\in H_\omega} \left| f(0) - B_\delta(f,0) \right|.$$

Для каждой функции $f(x)$ с класса H_ω построим функцию $f_2(x) := f(x) - f(0)$. Очевидно, что функция $f_2(x)$ принадлежит к классу H_ω, причем $f_2(0) = 0$. Отсюда

$$B_\delta(f_2;0) = B_\delta(f;0) - f(0),$$

т.е.

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{\substack{f\in H_\omega \\ f(0)=0}} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_\delta(t) dt \right|.$$

Учитывая четность ядра $K_\delta(t)$, нам достаточно ограничиться только случаем четных функций $f(x)$. Это значит, что

$$\mathcal{E}(H_\omega; B_\delta)_C = \sup_{f\in H} \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} f(t) K_\delta(t) dt \right|, \tag{18}$$

где H – множество четных функций $f \in H_\omega$, таких что $f(0) = 0$. Какой бы ни была функция $f \in H$

$$\frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} f(t) K_\delta(t) dt \right| \le \int_0^{\pi} \omega(t) K_\delta(t) dt. \tag{19}$$

С другой стороны, так как $K_\delta(t) \ge 0$, то для функции $f_0(t) \in H$,

$$f_0(t) = \omega(|t|), \quad |t| \le \pi,$$

будем иметь

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_0(t) K_\delta(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(t) K_\delta(t) dt. \tag{20}$$

Итак, согласно (18)–(20), получаем (17).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в равенстве (17) положить $\omega(t) = t$, то при $\delta \to \infty$ получим асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}(W^1; B_\delta)_C = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta^2}\ln\delta + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \tag{21}$$

Доказательство.

Чтобы показать справедливость следствия 1, запишем сначала бигармонический интеграл Пуассона в виде известного сингулярного интеграла. Для этого ядро бигармонического интеграла Пуассона представим в виде

$$K_\delta(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt = \frac{1}{2}\varphi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_\delta(k),$$

где

$$\varphi_\delta(k) := \left(1 + \frac{k}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right) e^{-\frac{k}{\delta}} \cos kt.$$

Применяя формулу суммирования Пуассона [13, с.72], получим, что

$$K_\delta(t) = \sqrt{2\pi} \left\{ \frac{1}{2}\Phi_\delta(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_\delta(2\pi k) \right\}, \tag{22}$$

где $\Phi_\delta(u)$ – косинус преобразование Фурье функций $\varphi_\delta(u)$, т.е.

$$\Phi_\delta(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi_\delta(z)\cos zudz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\left(1+\frac{z}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{z}{\delta}}\cos zt\cos zudz=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty\left(1+\frac{z}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz+\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty\left(1+\frac{z}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u-t)dz=V_1+V_2.$$

$$V_1=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^\infty\left(1+\frac{z}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right)e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\int_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz\right).$$

Дважды интегрируя по частям, получаем, что

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz=\frac{1}{\delta}\frac{1}{(u+t)^2+\frac{1}{\delta^2}}.$$

Аналогично, дважды проинтегрировав по частям, можно убедиться в справедливости равенства:

$$\int_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz=\frac{1}{u+t}\left(-\frac{1}{u+t}+\frac{2}{\delta}\frac{1}{u+t}\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2+\frac{1}{\delta^2}}-\left(\frac{1}{\delta}\right)^2\frac{1}{u+t}\int_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz\right).$$

Отсюда имеем, что

$$\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\int_0^\infty ze^{-\frac{z}{\delta}}\cos z(u+t)dz=\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-(u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(u+t)^2\right)^2}.$$

Итак, получаем, что

$$V_1=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-(u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(u+t)^2\right)^2}\right).$$

Аналогично,

$$V_2=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u-t)^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-(u-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(u-t)^2\right)^2}\right).$$

Тогда

$$\Phi_\delta(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(u+t)^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{\frac{1}{\delta}}{(u-t)^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\frac{1}{\delta^2}-(u-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(u-t)^2\right)^2}+\frac{\frac{1}{\delta^2}-(u+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(u+t)^2\right)^2}\right)\right). \quad (23)$$

Подставив соотношение (23) в (22), имеем, что

$$K_\delta(t)=\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k+t)^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k-t)^2+\frac{1}{\delta^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\frac{1}{\delta^2}-(2\pi k+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(2\pi k+t)^2\right)^2}+\frac{\frac{1}{\delta^2}-(2\pi k-t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(2\pi k-t)^2\right)^2}\right)\right).$$

Итак,

$$B_\delta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{(2\pi k+t)^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-(2\pi k+t)^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+(2\pi k+t)^2\right)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x+t)\right)_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(\frac{1}{\delta^2}+t^2\right)^2}\right)dt.$$

Учитывая последнее равенство, убеждаемся в справедливости следствия 1. Действительно,

$$\mathcal{E}(W^1;\,B_\delta)_C=\frac{\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}{\pi}\int_0^{\pi}t\frac{1-e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t}{\left(1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t+e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}tK_\delta(t)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(t)_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}\right)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}t\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}\right)dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^{\infty}(t)_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}\right)dt=I_1+I_2.$$

Найдем значения интеграла I_1: $I_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}t\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}-\frac{1}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}\right)\right)dt$.

Так как $\int_0^{2\pi}\frac{t}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}dt=\frac{1}{2}\ln\left(4\pi^2\delta^2+1\right)$, $\qquad \frac{2}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\frac{t}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}dt=-\frac{1}{4\pi^2\delta^2+1}+1$, и учитывая, то что $1-e^{-\frac{2}{\delta}}=\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}+O\left(\frac{1}{\delta^3}\right)$, находим

$$I_1=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\right)\ln\left(4\pi^2\delta^2+1\right)+\frac{2}{\pi}\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(-\frac{1}{4\pi^2\delta^2+1}+1\right)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\delta^2}\ln\delta^2\left(4\pi^2+\frac{1}{\delta^2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta}+\frac{2}{\pi}\frac{1}{\delta^2}\ln\delta+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Так как $1-e^{-\frac{2}{\delta}}\geq\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}$ и $(t)_{2\pi}\leq 2\pi$, то

$$I_2\leq\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^{\infty}(t)_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta^2}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\delta^2}\right)\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}\right)dt\leq\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^{\infty}2\pi\left(\frac{1}{\delta^2}\frac{1}{t^2}+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\delta^2}\right)\frac{2}{\delta^2}\frac{1}{t^4}\right)dt=O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Отсюда получаем утверждение следствия 1.

Так как $\frac{1}{\delta}\sim(1-\rho)$, когда $\delta\to\infty$, $\rho\to 1-$, то можно сделать вывод, что следствия из результатов С. Каниева, P. Pych, Л.П. Фалалеева (15) и (16) эквивалентные (21).

Следствие 2. *Если в равенстве (17) положить* $\omega(t)=t^{\alpha}$, $0\leq\alpha<1$, *то при* $\delta\to\infty$ *получим асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};B_{\delta})_C=\frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^{1+\alpha}}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \tag{22}$$

Доказательство.

Действительно,

$$\mathcal{E}(H^{\alpha};\,B_{\delta})_C=\frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2\int_0^{\pi}t^{\alpha}\frac{1-e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t}{\left(1-2e^{-\frac{1}{\delta}}\cos t+e^{-\frac{2}{\delta}}\right)^2}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^{\alpha}K_{\delta}(t)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(t^{\alpha}\right)_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}\right)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}t^{\alpha}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}\right)dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^{\infty}\left(t^{\alpha}\right)_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{\frac{1}{\delta^2}-t^2}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}\right)dt=I_3+I_4.$$

Найдем значения интегралов I_3 и I_4.

$$I_3=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}t^\alpha\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}-\frac{1}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}\right)\right)dt\,.$$

Учитывая формулы (3.241.2) и (3.241.5) из [14], имеем, что

$$\int_0^{2\pi}\frac{t^\alpha}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}dt=\delta^{1-\alpha}\left(\int_0^\infty\frac{t^\alpha}{t^2+1}dt-\int_{2\pi\delta}^\infty\frac{t^\alpha}{t^2+1}dt\right)=\delta^{1-\alpha}\left(\frac{\pi}{2\sin\frac{(1+\alpha)\pi}{2}}-\int_{2\pi\delta}^\infty\frac{t^\alpha}{t^2+1}dt\right)=\frac{\pi}{2}\frac{\delta^{1-\alpha}}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}+O(1),$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{t^\alpha}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}dt=\delta^{3-\alpha}\int_0^{2\pi\delta}\frac{t^\alpha}{\left(t^2+1\right)^2}dt=\delta^{3-\alpha}\left(\int_0^\infty\frac{t^\alpha}{\left(t^2+1\right)^2}dt-\int_{2\pi\delta}^\infty\frac{t^\alpha}{\left(t^2+1\right)^2}dt\right)=$$

$$=\delta^{3-\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)\pi}{4}\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}-\int_{2\pi\delta}^\infty\frac{t^\alpha}{\left(t^2+1\right)^2}dt\right)=\delta^{3-\alpha}\,\frac{(1-\alpha)\pi}{4}\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}+O(1)\,,$$

и учитывая то, что $1-e^{-\frac{2}{\delta}}=\frac{2}{\delta}-\frac{2}{\delta^2}+O\left(\frac{1}{\delta^3}\right)$, находим

$$I_3=\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\right)\left(\delta^{1-\alpha}\,\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}+O(1)\right)+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\frac{2}{\delta^2}\left(\delta^{3-\alpha}\,\frac{(1-\alpha)\pi}{4}\frac{1}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}+O(1)\right)\right)=$$

$$=\frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^\alpha}+\frac{1}{\delta^{1+\alpha}\cos\frac{\alpha\pi}{2}}-\frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^{1+\alpha}}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)=\frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^\alpha}+\frac{\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\frac{1}{\delta^{1+\alpha}}+O\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

$$I_4=\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^\infty\left(t^\alpha\right)_{2\pi}\left(\frac{\frac{1}{\delta}}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}+\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{2}\left(\frac{\frac{2}{\delta^2}}{\left(t^2+\frac{1}{\delta^2}\right)^2}-\frac{1}{t^2+\frac{1}{\delta^2}}\right)\right)dt\le$$

$$\le\frac{2}{\pi}\int_{2\pi}^\infty 2\pi\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{t^2}+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\delta^2}\right)\left(\frac{2}{\delta^2}\frac{1}{t^4}-\frac{1}{t^2}\right)\right)dt=O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Следствие 2 доказано.

Следует отметить, что равенство (22) совпадает со следствием из результата Л.П. Фалалеева и Т.И. Аманова (16).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.

2. Степанец, А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. – Київ : Наукова думка, 1981. – 340 с.

3. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 153, № 5. – С. 995–998.

4. Pych, P. On biharmonic function in unit disk / P. Pych. // Ann. pol. math. – 1968. – Vol. 20, №3. – P. 203–213.

5. Фалалеев, Л.П. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip_1 1$ от одного сингулярного інтеграла / Л.П. Фалалеев // Теоремы вложения и их приложения (материалы всесозного симпозиума). – Алма-Ата : Наука КазССР, 1976. – С. 163–167.

6. Аманов, Т.И. Приближение дифференцируемых функций операторами типа Абеля–Пуассона / Т.И. Аманов, Л.П. Фалалеев // Труды 5-го советско-чехословацкого совещания по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики (Алма-Ата, 1976). – Новосибирск, 1979. – С. 13–16.

7. Zhigallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhigallo, Yu.I. Kharkevych / Ukr. Math. Journal. – 2000. – Vol 52, № 7. – P. 1113–1117.

8. Zhyhallo, K.M. Approximation of differentiable periodic functions by their biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2002. – Vol 54, № 9. – P. 1462–1470.

9. Kharkevich, Yu.I. Asymptotics of the values of approximations in the mean for classes of differentiable functions by using biharmonic Poisson integrals / Yu.I. Kharkevych, I.V. Kal'chuk // Ukr. Math. Journal. – 2007. – Vol. 59, № 8. – P. 1224–1237.

10. Kharkevich, Yu.I. Approximation of functions from the class by Poisson biharmonic operators in the uniform metric / Yu.I. Kharkevych, T.V. Zhyhallo // Ukr. Math. Journal. – 2008. – Vol. 60, № 5. – P. 769–798.

11. Zhyhallo, K.M. Approximation of conjugate differentiable functions by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2009. – Vol. 61, № 7. – P. 399–413.

12. Zhyhallo, K.M. Approximation of functions from the classes $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by biharmonic Poisson integrals / K.M. Zhyhallo, Yu.I. Kharkevych // Ukr. Math. Journal. – 2011. – Vol. 63, № 7. – P. 1083–1107.

13. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.–Л.,1948.

14. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматиз, 1963. – 1100 с.

J. Zajac, Yu.I. Kharkevych, T.A. Stepaniuk. **Approximating Properties of Biharmonic Poisson's Integrals on the Classes H_ω**

In work we conducted research of questions of approximation functions from the classes $H_\omega := \left\{ \varphi \in C : \left|\varphi(t) - \varphi(t')\right| \le \omega\left(\left|t - t'\right|\right) \ \forall t, t' \in \mathbb{R} \right\}$, with a help of biharmonic Poisson's integrals $B_\delta(f; x)$. We solved the problem of Kolmogoroff-Nikolsky for biharmonic Poisson's integrals on the classes H_ω in the uniform metric.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 09.04.2012