УДК 517.948

В.М. Мадорский

О РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ ТИПА КАНТОРОВИЧА–КРАСНОСЕЛЬСКОГО

В статье рассматриваются одношаговые и многошаговые нелокальные итерационные процессы для решения нелинейных уравнений. За счёт регуляризации процессы «работают» с «плохого» начального приближения. Скорость сходимости рассмотренных нелокальных вариантов процессов типа Канторовича-Красносельского оказывается сверхлинейной.

Для решения нелинейного уравнения $f(x)+g(x)=0$ (1)
где f, g – нелинейные операторы, действующие из некоторой выпуклой области D пространства R^n в R^n, $f\in C_D^{(1)}$, $g\in C_D$ в монографии [1] предложены нерегуляризованные нелокальные итерационные процессы для решения уравнения (1).

В настоящей работе для решения уравнения (1) предлагается семейство итерационных процессов:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n:

$$(\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E+\overline{(f'(x_n)+}\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E)\times$$
$$(f'(x_n)+\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E))\Delta x_n= \tag{2}$$
$$=-\overline{(f'(x_n)+}\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E)(f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n).$$

Здесь $\overline{f'}(x_n)$ – оператор, сопряженный оператору $f'(x_n)$, $\alpha<<1$.

Шаг 2. Находится очередное приближение $n=0,1,2,\ldots$

$$x_{n+1}=x_n+\sqrt{\beta_n}\Delta x_n\,. \tag{3}$$

Шаг 3. Проверяется условие окончания вычислительного процесса: если $\|f(x_{n+1}+g(x_{n+1})<\varepsilon\|$, $\varepsilon<<1$ (ε – параметр останова), то конец просчетов иначе,

Шаг 4. Производится пересчёт шаговой длины β_{n+1} по одной из формул, которые будут приведены ниже, таким образом, что выполняется соотношение

$$\sqrt{\beta_0}\|f(x_0)+\beta_{-1}g(x_n)\|=\ldots=\sqrt{\beta_n}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|,\ \beta_{n-1}=\beta_0 \tag{4}$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Далее полагаем, что имеют место оценки:

$$\|(\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E+(\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E)\times$$
$$\times(f'(x_n)+\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E))^{-1}\|\le B \tag{5}$$
$$\|(\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E)^{-1}\|\le A,$$
$$\|\overline{f'(x_n)}+\alpha\beta_{n-1}\|f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|E\|\le C\,.$$

Относительно оператора g полагаем, что $\forall x\in D$ имеет место соотношение:

$$\|\beta_n g(x_{n+1})-\beta_{n-1}g(x_n)\|\le K\alpha\,, \tag{6}$$

а производная Фреше оператора f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L.

Теорема 1. Пусть в интересующей нас области D существует x^* – решение уравнения (1), операторы f и g удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговые длины β_{0_1}, β_{-1} таковы, что $\varepsilon_0 < 1$. Тогда перечисленные ниже алгоритмы со сверхлинейной скоростью сходятся к x^*.

Доказательство. Из условий теоремы имеем

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n-1}) - x_n) \| \le L \| x_{n+1} - x_n \|^2 . \qquad (7)$$

Далее, используя (2), находим $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$.

$$\begin{gathered} f'(x_n)\Delta x_n = -\alpha \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| (\overline{f'(x_n)} + \alpha\beta_n \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| E)^{-1} \times \\ \times \Delta x_n - (f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)) - \alpha \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| \Delta x_n . \end{gathered} \qquad (8)$$

Простые преобразовании позволяют получить оценку, используя (5–8)

$$\begin{gathered} \| f(x_{n+1}) + \beta_{n-1} g(x_{n+1}) \| \le \beta_n L B^2 \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2 + \\ + \alpha\beta_n A C \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2 + \alpha\beta_n A \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2 + \\ + (1 - \sqrt{\beta_n}) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| + \alpha K_1 \beta_n \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2 = \\ = (1 - \sqrt{\beta_n}) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| + \beta_n \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2 (L B^2 + \\ + \alpha A C + \alpha A + \alpha K_1) = (1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_n)) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| = \\ = q_n \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|, \varepsilon_n = (L B^2 + \\ + \alpha A C + \alpha A + \alpha K_1) \sqrt{\beta_n} \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|, \\ K_1 = K / \ \beta_0 \| f(x_0) + \beta_0 g(x_0) \|^2 , \ q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1 - \varepsilon_n) . \end{gathered} \qquad (9)$$

Соотношение (9) является базовым при доказательстве сходимости процессов (2–4) при различных способах задания шаговых длин β_{n+1}.

При $n = 0$ из (9) и условий теоремы имеем

$$\| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| \le (1 - \sqrt{\beta_0}(1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) + \beta_0 g(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) + \beta_0 g(x_0) \| .$$

Так как $q_0 < 1$, тогда

$$\| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| < \| f(x_0) + \beta_0 g(x_0) \| . \qquad (10)$$

Из (4) и (10) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ из (4), (10) и условий теоремы имеем оценку

$$\begin{gathered} \| f(x_2) + \beta_1 g(x_2) \| \le (1 - \sqrt{\beta_1}(1 - \varepsilon_1)) \| f(x_1) + \beta_0 g(x_0) \| = \\ = q_1 \| f(x_1) + \beta_0 g(x_0) \| \le q_1 q_0 \| f(x_0) + \beta_0 g(x_0) \| . \end{gathered} \qquad (11)$$

И так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0 < 1$. Из (9) и (11) при $n = 1$ имеем, что $\| f(x_2) + \beta_1 g(x_2) \| < \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \|$, откуда в силу (4) следует, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (9) справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \le \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) + \beta_0 g(x_0) \| < q_0^{n+1} \| f(x_0) + \beta_0 g(x_0) \| , \qquad (12)$$

из которой следует сходимость последовательности элементов $\{ f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \}$ к элементу $(f(x^*) + \beta^* g(x^*))$. При этом так как $\beta_n \nearrow 1$, то есть последовательность $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей, то существует предельный элемент β^*. Предлагаемые ниже алгоритмы пересчёта шаговой длины таковы, что $\lim \beta_n = 1$ при $n \to \infty$.

В связи со сказанным выше и из (12) имеем, что

$$\lim\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_n)\| = \| f(x^*)+g(x^*)\| = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что последовательность элементов, генерируемая процессом (2–4), сходится к x^* решению уравнения (1).

Из (2) и условий теоремы имеем оценку

$$\| x^* - x_n \| \le \sum_{i=0}^{\infty} \|\Delta x_i\| \le \frac{BCq_0^n \| f(x_0)+\beta_0 g(x_0)\|}{1-q_0}, \qquad (13)$$

из которой следует и сильная (по норме) сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*.

При $n=0$ из (13) находим величину радиуса сферы $D=\overline{S}(x_0,r)$, $r=\dfrac{BC\| f(x_0)+\beta_0 g(x_0)\|}{1-q_0}$.

Как следует из (12), существует такой номер n_0, что для всех $k>n_0$, итерация (2–4) попадает в область притяжения метода Канторовича-Красносельского с $\beta_k=1$, рассмотренного в [2].

Нетрудно показать, что, начиная с $n>n_0$, метод (2–4) имеет квадратичную скорость сходимости. При $\beta_k=1$ из (9) имеем $\| f(x_{k+1})+g(x_{k+1})\| \le (LB^2+\alpha A+\alpha AC \ +\alpha K_1)\| f(x_k)+g(x_k)\|^2$, или $\varepsilon_{k+1}\le \varepsilon_k^2$, из которой следует локальная квадратичная скорость сходимости процесса (2–4) к x^*. Теорема доказана.

Замечание 1. Константы, фигурирующие в формулировке теоремы, фактически нигде не вычисляются. Важен лишь факт их существования.

Замечание 2. Из соотношения (13) следует, что рассмотренные выше алгоритмы легко можно рассматривать в банаховых пространствах.

Замечание 3. Конкретные виды алгоритмов, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, имеют вид:

алгоритм 1 пересчёта шаговой длины:

$$\beta_{n+1}=\min(1,\frac{\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|^4\gamma_n}{\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|^2(\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|^2+\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|^2)\beta_n})$$

$$\gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\| f(x_n)+\beta_{n-1}g_t(x_n)\|^4(\| f(x_{n+1})+\beta_n g_t(x_{n+1})\|^2+\| f(x_{n+2})+\beta_{n+1}g_t(x_{n+2})\|^2)\beta_{n+1}}{\| f(x_{n+1})+\beta_n g_t(x_{n+1})\|^4(\| f(x_n)+\beta_{n-1}g_t(x_n)\|^2+\| f(x_{n+1})+\beta_n g_t(x_{n+1})\|^2)\beta_n}$$

$$\gamma_0=\frac{\beta_0^2(\| f(x_0)+\beta_0 g_t(x_0)\|^2+\| f(x_1)+\beta_0 g_t(x_1)\|^2)}{\| f(x_0)+\beta_0 g_t(x_0)\|^2}. \qquad (14)$$

Алгоритм 2 пересчёта шаговой длины:

$$\beta_{n+1}=\min(1,\frac{\gamma_n\| f(x_n)+\beta_{n-1}g_t(x_n)\|^2}{(\| f(x_n)+\beta_{n-1}g_t(x_n)\|^2+\| f(x_{n+1})+\beta_n g_t(x_{n+1})\|^2)\beta_n}), \qquad (15)$$

$$\gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\| f(x_n)\|^2(\| f(x_{n+1})+\beta_n g_t(x_{n+1})\|^2+\| f(x_{n+2})+\beta_{n+1}g_t(x_{n+2})\|^2)\beta_{n+1}}{\| f(x_{n+2})+\beta_{n-1}g_t(x_{n+2})\|^2(\| f(x_n)+\beta_{n-1}g_t(x_n)\|^2+\| f(x_{n+1})+\beta_n g_t(x_{n+1})\|^2)\beta_n}$$

$$\gamma_0=\frac{\beta_0(\| f(x_0)+\beta_0 g_t(x_0)\|^2+\| f(x_1)+\beta_0 g_t(x_1)\|^2)}{\| f(x_1)+\beta_0 g_t(x1)\|^2}.$$

Алгоритм 3 пересчёта шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\beta_0^2 \left\| f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0) \right\|^2 \gamma_n}{\left\| f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1}) \right\|^2 \beta_n}), \tag{16}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n};\ \gamma_0 = 1.$$

Алгоритм 4 пересчёта шаговой длины:

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\left\| f(x_0) + \beta_0 g_t(x_0) \right\| \gamma_n}{\left\| f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1}) \right\|^2 \beta_n}), \tag{17}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \left\| f(x_{n+1}) + \beta_n g_t(x_{n+1}) \right\|}{\left\| f(x_{n+2}) + \beta_{n+1} g_t(x_{n+2}) \right\|};\ \gamma_0 = \beta_0^2.$$

Перечисленные выше четыре алгоритма удовлетворяют условию (4), в чём нетрудно убедиться, взяв отношение $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$. Переход к пределу при $n \to \infty$ в выражениях для β_{n+1} во всех четырёх алгоритмах позволяет утверждать, что начиная с некоторого номера итерации k_0, все $\beta_i \equiv 1$ для $i > k_0$.

В качестве одного из вариантов регуляризованного итерационного процесса рассмотрим следующий алгоритм.

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно поправки Δx_k:

$$f'(x_k)\Delta x_k = -\beta_k (f(x_k) + \beta_{k-1} g_I(x_k)),\ g_I(x) = g(x) - f(x),\ k = 0,1...$$

Шаг 2. Вносится поправка Δx_k в вектор x_k

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$$

Шаг 3. Проводится проверка окончания вычислительного процесса: если $\left\| g(x_k) \right\| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (ε – параметр пространства *I*, то конец просчётов, иначе

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина $\beta_{k+1}, \beta_{k+1} \in (0,1]$ одним из приведённых способов и осуществляется переход на шаг 1.

Здесь в развитии рассмотренных выше подходов к решению нелинейных уравнений в качестве вектора $f(x)$ целесообразно брать гладкую аппроксимацию функции $g(x)$, которую назовём $f_1(x)$ и решаем уравнение

$$f_1(x) + \left(f(x) + g(x) - f_1(x)\right) = f_1(x) + g_1(x) = 0.$$

Процесс шаг 1 – шаг 4 осуществляется нужное число раз.

Относительно оператора f_1 полагаем, что имеет место оценка $\left\| [f_1'(x)]^{-1} \right\| \le B \quad \forall x \in D$, а оператор $g_1(x)$ удовлетворяет условию (6).

L – константа Липшица оператора $f_1'(x)$ в области *D*.

Теорема 2. Пусть в области $D = \frac{B \left\| f_1(x_0) + \beta_0 g_1(x_0) \right\|}{1 - q_0}$ существует x^* – решение уравнения (1), операторы $f_1(x)$ и $g_1(x)$ удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговые длины β_{0_1}, β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0 (K\alpha B + LB^2) \left\| f_1(x_0) + \beta_{-1} g_1(x_0) \right\| < 1$$

Тогда алгоритм шаг 1 – шаг 4 с β_{n+1}, определяемыми по формулам (14–17) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.46 монографии [1], при этом β_{n+1} выбирается предложенным там способом.

В результате мы имеем, что

$$\lim\left\| f(x_k)+\beta_{k-1}g_I(x_k)\right\| = \left\| f(x^*)+g_1(x^*)\right\| = \left\| g(x^*)\right\| = 0, k\to\infty,$$

откуда и следует, что предельный элемент последовательности, генерируемой алгоритмом шаг 1 – шаг 4, является решением уравнения $g(x)=0$.

Рассмотренные выше итерационные процессы являются многошаговыми. Предлагаемые ниже одношаговые процессы являются весьма эффективными для решения нелинейного уравнения (1):

Шаг 1. Решается нелинейная система относительно поправки x_n:

$$(\alpha\left\| f(x_n)+g(x_n)\right\|^2 E+\overline{f'(x_n)}f'(x_n))\Delta x_n = -\overline{f'(x_n)}(f(x_n)+g(x_n)).$$

Шаг 2. Вносится поправка для получения очередного приближения

$$x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_n.$$

Шаг 3. Проводится проверка окончания вычислительного процесса: если $\left\| f(x_n)+g(x_n)\right\| < \varepsilon, \varepsilon << 1$ (ε – параметр останова), то конец просчётов, иначе пересчёт β_{n+1} по одной из следующих формул:

$$\beta_{n+1}=\min(1,\frac{\left\| f(x_n)\right\|\ \gamma_n}{\left\| f(x_{n+1})\right\|\ \beta_n}),\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\left\| f(x_n)\right\|}{\left\| f(x_{n+1})\right\|},\ \gamma_0=\beta_0^2 \tag{18}$$

$$\beta_{n+1}=\min(1,\frac{\left\| f(x_0)\right\|\ \gamma_n}{\left\| f(x_{n+1})\right\|\ \beta_n}),\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\beta_{n+1}}{\beta_n},\ \gamma_0=\beta_0^2 \tag{19}$$

$$\beta_{n+1}=\min(1,\frac{\left\| f(x_n)\right\|\ \gamma_n}{\left\| f(x_{n+1})\right\|\ \beta_n}),\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n(\left\| f(x_n)+f(x_{n+1})\right\|)\left\| f(x_n)\right\|}{2\left\| f(x_{n+1})\right\|^2}, \gamma_0=\beta_0^2 \tag{20}$$

$$\beta_{n+1}=\min(1,\frac{\left\| f(x_0)\right\|\beta_n\gamma_n}{\left\| f(x_{n+1})\right\|}),\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\beta_n}{\beta_{n+1}},\ \gamma_0=1 \tag{21}$$

$$\beta_{n+1}=\min(1,\frac{\left\| f(x_0)\right\|\gamma_n}{\left\| f(x_{n+1})\right\|\beta_n}),\ \gamma_{n+1}=\frac{\gamma_n\beta_{n+1}}{\beta_n},\ \gamma_0=\beta_0^2 \tag{22}$$

и переход на шаг 1.

Вполне аналогично тому, как это было сделано выше, могут быть сформулированы и доказаны теоремы о сходимости процессов шаг 1 – шаг 4 с β_{n+1}, определяемых по одной из формул (18–21) или (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест, 2005. – 186 с.

2. Красносельский, М.А. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.] – М : Наука, 1969. – 455 с.

V.M. Madorski. On Regularized Nonlocal Iterative Processes of Kantorovich-Krasnoselski Type

The paper is concerned with the one and many-step iterative methods of approximate solution of the nonlinear operator equation in the space of R^n. The processes converge to exact solution of the operator equation from the «bad» initial approximation. The local speed of convergence of the processes is shown.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 23.12.2010 г.