УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов

ВНУТРЕННЯЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВЕ 2+1

Исследованы внутренние симметрии массивного и безмассового уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1. Показано, что симметрия уравнения с $m \neq 0$ описывается группой SO(3,1), которая соджержит в качестве подгруппы зарядовую симметрию, присущую обычному уравнению Дирака. В безмассовом случае имеет место 12-параметрическая группа симметрии, которая, в частности, содержит в качестве подгруппы преобразования Паули-Гюрши.

Введение

В последние годы в связи с получением графена появилось множество публикаций, посвященных теоретическому описанию двумерных кристаллических структур [1]. Существенное место среди этих публикаций занимает исследование симметрийных свойств дираковских полей в пространстве размерности 2+1.

В работах [2, 3] был развит подход, основанный на использовании вещественной матричной формы описания дираковских и дирак-кэлеровских полей в обычном 4-мерном пространстве 3+1. При этом было установлено наличие более широкой группы внутренней симметрии указанных полей, чем считалось ранее.

В настоящей работе данный подход применяется для исследования внутренних симметрий массивного и безмассового уравнений Дирака в пространстве 2+1.

Вещественная форма уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1

Уравнение Дирака в трехмерном пространстве-времени можно получить из обычного уравнения Дирака

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\psi = 0 \qquad \left(\mu = 0,1,2,3\right), \tag{1}$$

исключив из него одно пространственное измерение, например, x_3. В результате получим уравнение:

$$\left(\gamma_k \partial_k + m\right)\psi = 0 \qquad \left(k = 0,1,2\right). \tag{2}$$

Будем использовать метрику, соответствующую выбору $x_0 = ict$. Матрицы Дирака возьмем в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где σ – матрицы Паули.

Применяя к (2) операцию комплексного сопряжения и рассматривая сопряженное уравнение совместно с исходным, придем к 8-компонентной системе уравнений, эквивалентной исходному уравнению (2). Ее также можно записать в стандартной матричной форме

$$\left(\Gamma_k \partial_k + m\right)\Psi = 0, \tag{4}$$

где $\Psi = \left(\psi, \psi^*\right)$ – столбец и матрицы Γ_k имеют размерность 8x8. Если теперь перейти в базис, в котором

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^r \\ \psi^i \end{pmatrix}, \quad \psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi + \psi^*\right), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi - \psi^*\right) \tag{5}$$

и матрицы Γ_k имеют вид

$$\Gamma_0 = \sigma_1 \otimes \gamma_0, \qquad \Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1, \qquad \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2, \tag{6}$$

полученная система становится, как нетрудно проверить, вещественной. Уравнение (4) с волновой функцией (5) и матрицами (6) будем называть вещественной формой исходного уравнения (2), (3) (подробный комментарий по поводу данной терминологии содержится в работе [2]). Указанную форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии уравнения (2), (3).

Внутренняя симметрия массивного уравнения Дирака

Перейдем сначала в так называемый фермионный базис в котором диракоподобные матрицы Γ_k принимают вид

$$\Gamma_k = I_2 \otimes \gamma_k . \tag{7}$$

Данный переход осуществляется посредством унитарного преобразования [4]

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{1}{2}\left[I_2 \otimes \left(I_4 + i\gamma_2\right) + \sigma_1 \otimes \left(I_4 - i\gamma_2\right)\right], \\ \mathrm{A}^{-1} &= \frac{1}{2}\left[I_2 \otimes \left(I_4 - i\gamma_2\right) + \sigma_1 \otimes \left(I_4 + i\gamma_2\right)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Преобразования внутренней симметрии уравнения (4), коммутирующие с матрицами Γ_k (7), задаются в этом базисе матрицами двух типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4 , \tag{9}$$

$$Q_2 = q^{(2)} \otimes \gamma_4 , \tag{10}$$

где

$$\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 \tag{11}$$

(множитель i в (11) обеспечивает эрмитовость γ_4), $q^{(1)}_{mn}$, $q^{(2)}_{mn}$ – произвольные комплексные матрицы 2x2.

Возвращаясь с помощью обратного преобразования (8) в базис (5), для матриц Q_1, Q_2 получим выражения:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes I_4 + \begin{pmatrix} -\rho_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_1 & \rho_1 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2 , \tag{12}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \otimes I_4 + \begin{pmatrix} -\rho_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \rho_2 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_4\gamma_2 , \tag{13}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(q^{(1)}_{11} + q^{(1)}_{22}\right),\ \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(q^{(1)}_{11} - q^{(1)}_{22}\right),\ \beta_1 = \frac{1}{2}\left(q^{(1)}_{12} + q^{(1)}_{21}\right),\ \rho_1 = \frac{1}{2}\left(q^{(1)}_{12} - q^{(1)}_{21}\right), \\ &\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(q^{(2)}_{11} + q^{(2)}_{22}\right),\ \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(q^{(2)}_{11} - q^{(2)}_{22}\right),\ \beta_1 = \frac{1}{2}\left(q^{(2)}_{12} + q^{(2)}_{21}\right),\ \rho_1 = \frac{1}{2}\left(q^{(2)}_{12} - q^{(2)}_{21}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Накладывая на преобразования

$$\Psi' = Q_1\Psi, \qquad \Psi' = Q_2\Psi \tag{15}$$

условие сохранения структуры (5) волновой функции Ψ (условие вещественности 8-компонентного поля), найдем следующие ограничения на элементы матриц Q_1 (12), Q_2 (13):

$$\begin{aligned} &\alpha_1,\ \lambda_1,\ \beta_2,\ \rho_2\ -\ \textit{вещественные}, \\ &\beta_1,\ \rho_1,\ \alpha_2,\ \lambda_2\ -\ \textit{чисто мнимые}. \end{aligned} \tag{16}$$

Преобразования (12), (13) при выполнении условий (16) могут быть параметризованы посредством эрмитовских матриц, имеющих в базисе (5) вид:

$$\begin{aligned} &J^1 = \sigma_1 \otimes \mathrm{I}_4, \quad J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2, \quad J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2, \\ &I^1 = \sigma_1 \otimes \mathrm{I}_4, \quad I^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_4\gamma_2, \quad I^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_4\gamma_2, \quad I^4 = \mathrm{I}_2 \otimes \gamma_4 . \end{aligned} \tag{17}$$

В фермионом базисе получим:

$$J^{\mathrm{i}} = \sigma_i \otimes \mathrm{I}_4, \quad I^i = \sigma_i \otimes \gamma_4, \quad \mathrm{I}^4 = \mathrm{I}_2 \otimes \gamma_4, \tag{18}$$

Сравнивая (17) с общими выражениями (12), (13) для матриц Q_1, Q_2, находим для параметров $\omega_i, \Omega_i, \Omega_4$, соответствующих генераторам J^i, I^i, I^4, значения $\left(\omega_1 \to J^i, \Omega_i \to I^i, \Omega_4 \to I^4\right)$:

$$\begin{aligned}&\omega_2 = i\rho_1,\ \ \omega_3 = \lambda_1,\ \ \Omega_2 = \rho_2,\ \ \Omega_3 = -i\lambda_2,\ \ \Omega_4 = -i\alpha_2\ -\ \textit{вещественные},\\ &\omega_1 = \beta_1,\ \ \Omega_1 = -i\beta_2\ -\ \textit{мнимые}.\end{aligned} \tag{19}$$

Наложим теперь на генераторы (17) (или (18)) и параметры (19) условие

$$(\omega J)^+ \eta = -\omega\eta J \tag{20}$$

(η – матрица билинейной формы), вытекающее из требования

$$Q^+ \eta\, Q = \eta \tag{21}$$

инвариантности лагранжиана теории

$$L = -\overline{\Psi}(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi \tag{22}$$

относительно преобразований внутренней симметрии. При этом учтем, что матрица η в базисах (5) и фермионом имеет соответственно вид:

$$\eta = \mathrm{I}_2 \otimes \gamma_0, \tag{23}$$

$$\eta = \sigma_1 \otimes \gamma_0. \tag{24}$$

В результате получим, что условию (20) удовлетворяют шесть генераторов J^i и I^i. Эти генераторы удовлетворяют алгебре

$$\begin{aligned}&\left[J^i, J^j\right] = 2i\varepsilon_{ijk} J^k,\\ &\left[J^i, I^j\right] = 2i\varepsilon_{ijk} I^k,\\ &\left[I^i, I^j\right] = 2i\varepsilon_{ijk} J^k\end{aligned} \tag{25}$$

и, следовательно, образуют 6-параметрическую группу. Генераторы J^i образуют в ней подгруппу $SO(2,1)$ типа зарядовой симметрии, присущую массивному уравнению Дирака в пространстве 3+1.

Симметрия безмассового поля

В безмассовом случае ($m = 0$) инвариантность уравнения

$$\Gamma_k \partial_k \Psi = 0, \tag{26}$$

наряду с преобразованиями Q_1, Q_2, коммутирующими с матрицами Γ_k, может быть обеспечена также преобразованиями, антикоммутирующими с Γ_k:

$$[Q, \Gamma_k]_+ = 0. \tag{27}$$

Условию (27) удовлетворяют матрицы следующих двух типов (в фермионом базисе):

$$Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \tag{28}$$

$$Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5. \tag{29}$$

Здесь $q^{(3)} = q^{(3)}_{mn}$, $q^{(4)} = q^{(4)}_{mn}$ – произвольные комплексные матрицы 2x2; γ_3, γ_5 – матрицы Дирака

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \tag{30}$$

В базисе (5) матрицы Q_3, Q_4 принимают вид

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \beta_3 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix} \otimes \gamma_3 + \begin{pmatrix} \lambda_3 & \rho_3 \\ -\rho_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2\gamma_3, \tag{31}$$

$$Q_4 = \begin{pmatrix} \beta_4 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{pmatrix} \otimes \gamma_5 + \begin{pmatrix} \lambda_4 & \rho_4 \\ -\rho_4 & -\lambda_4 \end{pmatrix} \otimes i\gamma_2\gamma_5, \tag{32}$$

где числа α_3, β_3, λ_3, ρ_3, α_4, β_4, ρ_4, λ_4 выражаются через элементы матриц $q_{mn}^{(3)}$, $q_{mn}^{(4)}$ по формулам, аналогичным (14). Требование вещественности поля приводит к следующим ограничениям на эти числа:

$\alpha_3, \lambda_3, \beta_4, \rho_4$ – *вещественные,*

$\beta_3, \rho_3, \alpha_4, \lambda_4$ – *чисто мнимые.*

(33)

Инвариантность лагранжиана

$$L = -\overline{\Psi}\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \tag{34}$$

безмассового поля относительно преобразований Q_3, Q_4 обеспечивается выполнением условий

$$Q_3^+ \eta\, \Gamma_k Q_3 = \eta\, \Gamma_k, \qquad Q_4^+ \eta\, \Gamma_k Q_4 = \eta\, \Gamma_k, \tag{35}$$

принимающих с учетом антикоммутации матриц Γ_k с Q_3, Q_4 вид:

$$Q_3^+ \eta\, Q_3 = -\eta, \qquad Q_4^+ \eta\, Q_4 = -\eta. \tag{36}$$

Условия (36) приводят к дополнительным ограничениям на элементы матриц Q_3, Q_4:

$$\begin{aligned} &\alpha_3^2 + \rho_3^2 - \beta_3^2 - \lambda_3^2 = 1, \\ &\beta_4^2 + \lambda_4^2 - \alpha_4^2 - \rho_4^2 = 1. \end{aligned} \tag{37}$$

Условия (33), (37) означают, что матрицы Q_3, Q_4 задают некоторое шестипараметрическое преобразование, которое можно параметризовать, например, посредством эрмитовских генераторов K^i, L^i $(i = 1, 2, 3)$, имеющих в фермионом базисе вид:

$K^i = \sigma_i \otimes \gamma_3, \qquad L^i = \sigma_i \otimes \gamma_5.$

(38)

В базисе (5) для K^i, L^i получаются выражения:

$$\begin{aligned} &K^1 = \mathrm{I}_2 \otimes \gamma_3, \quad K^2 = i\sigma_2 \otimes \gamma_3\gamma_2, \quad K^3 = i\sigma_3 \otimes \gamma_3\gamma_2, \\ &L^1 = \mathrm{I}_2 \otimes \gamma_5, \quad L^2 = i\sigma_2 \otimes \gamma_5\gamma_2, \quad L^3 = i\sigma_3 \otimes \gamma_5\gamma_2. \end{aligned} \tag{39}$$

Сравнивая (39) с общими выражениями (31), (32) для матриц Q_3, Q_4 в базисе (5), заключаем, что генераторам K^i, L^i соответствуют параметры $(\Theta_i \to K^i,\ \Lambda_i \to L^i)$

$$\begin{aligned} &\Theta_1 = \beta_3, \ \Theta_2 = -i\rho_3, \ \Theta_3 = -\lambda_3, \\ &\Lambda_1 = \beta_4, \ \Lambda_2 = i\rho_4, \ \Lambda_3 = \lambda_4, \end{aligned} \tag{40}$$

среди которых три вещественных $(\Lambda_1, \Theta_2, \Theta_3)$ и три мнимых $(\Theta_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ параметра.

Заключение

Таким образом, внутренняя симметрия лагранжевой формулировки безмассового уравнения Дирака в пространстве 2+1 описывается 12-параметрическим преобразованием, алгебра генераторов которого, наряду с (25), характеризуется соотношениями:

$$\begin{aligned} &[K^i, K^j] = 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ &[L^i, L^j] = 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ &[J^i, K^j] = 2i\varepsilon_{ijk} K^k, \\ &[J^i, L^j] = 2i\varepsilon_{ijk} L^k \end{aligned} \tag{41}$$

и т.д. Помимо упоминавшейся выше группы $SO(2,1)$ зарядовой симметрии, здесь содержится в качестве подгруппы также группа $SO(3)$ Паули-Гюрши с генераторами J^1, L^2, L^3, присущая безмассовому уравнению Дирака в пространстве 3+1.

Полученные результаты могут представлять интерес с точки зрения теоретического описания симметрийных свойств графена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bashir, A. Fermions in old space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, M. Calicia // arXiv: hep-ph / 0502089v1 9 Feb 2005.

2. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака–Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ, сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.

3. Плетюхов, В.А. Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Весці НАНБ, сер. фіз.-мат. н. – 2010. – № 4. – С. 89–94.

4. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та, сер. 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2009. – № 2. – С. 46–51.

***V.A. Pletyukhov.* Internal Symmetry of Dirac Equation in Space-Time 2+1**

Internal symmetries of massive and massless Dirac equation in space-time 2+1 dimensions are investigated. It is shown that the massive equation ($m \neq 0$) has the symmetry group SO(3,1) and include the charge symmetry as subgroup. The massless Dirac equation has 12-parameters symmetry group which as subgroup contains the transformations of Pauli–Gursey type

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 22.02.2011 г.