УДК 539.12

Е.М. Овсиюк

ЗАДАЧА КЕПЛЕРА ДЛЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2 В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ

Проведено разделение переменных в уравнении Паули в гиперболическом пространстве Лобачевского для частицы со спином 1/2 при наличии внешнего кулоновского поля. Точные решения полученных радиальных уравнений построены в функциях Гойна, найден точный спектр энергии частицы.

Введение

Квантовая механика начиналась с теории атома водорода. Модель атома водорода в квантовой механике основана на предположении о евклидовом характере геометрии трехмерного пространства. Естественно возникают вопросы: что в этом описании атома водорода определяется предположением о евклидовости геометрии пространства, и какие изменения влечет допущение о других пространственных геометриях, например, Лобачевского или Римана. Такие вопросы имеют принципиальное значение, даже если сейчас и нет возможностей для их экспериментальной проверки.

Впервые атом водорода в трехмерном пространстве постоянной положительной кривизны был рассмотрен Шредингером [1] при развитии им метода факторизации в квантовой механике. С помощью этого метода был найден дискретный спектр атома водорода в плоском пространстве. Идея состояла в том, чтобы изменить систему так, чтобы можно было методом факторизации исследовать весь спектр энергии, включая и область $E > 0$. Однако простое помещение атома внутрь ящика конечных размеров, чтобы получить дискретный спектр энергии, не представляло интереса. В связи с этим Шредингер предложил рассматривать атом водорода на фоне пространства постоянной положительной кривизны сферического пространства Римана. Из-за компактности пространства эта модель может моделировать эффект потенциального ящика [1], [2].

В сферических координатах пространства Римана S_3

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2)$$

шредингеровский гамильтониан в безразмерных единицах имеет вид

$$H = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{\tan\chi}, \qquad (1)$$

где ρ – радиус кривизны; M – масса электрона; $\hbar^2/M\rho^2$ – единица энергии; $e = \frac{\alpha}{\rho}/\frac{\hbar^2}{M\rho^2}$ – константа взаимодействия Кулона; знак $e/\tan\chi$ в (1) соответствует силе притяжения Кулона. Спектр энергии дискретный:

$$\varepsilon_n = -\frac{e^2}{2n^2} + \frac{1}{2}(n^2 - 1), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Впервые атом водорода в пространстве отрицательной кривизны, пространстве Лобачевского H_3, был рассмотрен Инфельдом и Шильдом [3]

$$dl^2 = d\chi^2 + \cosh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2), \qquad H = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{g}\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{\tanh\chi}.$$

В этом случае энергетический спектр содержит дискретную и непрерывную части. Число энергетических уровней конечно, они задаются выражением

$$-\frac{e^2}{2} \le \varepsilon \le (\frac{1}{2} - e), \qquad \varepsilon_n = -\frac{e^2}{2n^2} - \frac{1}{2}(n^2 - 1), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N.$$

В области $\varepsilon \geq (\frac{1}{2} - e)$ энергетический спектр непрерывен.

Таким образом, модели атома водорода в пространствах Евклида, Лобачевского и Римана существенно различаются, что является следствием различий трех геометрий: E_3, H_3, S_3. К настоящему времени существует большое число работ, касающихся этих обобщенных моделей для атома водорода [4]–[18]. Однако до сих пор не было какого-либо существенного прогресса в исследовании квантовомеханической задачи Кеплера для частицы со спином 1/2. Следует отметить лишь, что приближенные формулы для энергетического спектра в релятивистском дираковском случае были получены в [13], [16].

В настоящей работе квантовомеханическая задача Кулона для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского решена точно в нерелятивистской теории Паули.

1. Разделение переменных в уравнении Дирака в криволинейных моделях

Рассмотрим процедуру разделения переменных в уравнении Дирака на фоне гиперболического пространства Лобачевского. Диагональная тетрада выбрана следующим образом:

$$dS^2 = dt^2 - d\beta^2 - \sinh^2\beta (d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2)\,,$$

$$e^{\alpha}_{(0)} = (1,0,0,0)\,, \qquad e^{\alpha}_{(3)} = (0,1,0,0)\,,$$

$$e^{\alpha}_{(1)} = (0,0,\sinh^{-1}\beta,0)\,, \qquad e^{\alpha}_{(2)} = (0,0,0,\sinh^{-1}\beta\sin^{-1}\theta)\,. \tag{2}$$

Коэффициенты вращения Риччи равны

$$\gamma_{ab0} = 0\,, \gamma_{ab3} = 0\,, \qquad \gamma_{ab1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\coth\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\coth\beta & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{ab2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cot\theta\sinh^{-1}\beta & 0 \\ 0 & -\cot\theta\sinh^{-1}\beta & 0 & -\coth\beta \\ 0 & 0 & +\coth\beta & 0 \end{vmatrix}.$$

Общековариантное уравнение Дирака [19]

$$\left[i\gamma^c (e^{\alpha}_{(c)}\partial_\alpha + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abc}) - m \right]\Psi = 0$$

принимает вид

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i(\gamma^3 \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\gamma^1 j^{31} + \gamma^2 j^{32}}{\tanh\beta)}) + \frac{1}{\sinh\beta}\Sigma_{\theta\phi} - m \right]\Psi = 0\,. \tag{3}$$

С учетом

$$\frac{\gamma^1 j^{31} + \gamma^2 j^{32}}{\tanh\beta} = \frac{\gamma^3}{\tanh\beta}\,, \qquad \Psi = \frac{1}{\sinh\beta}\tilde{\Psi}$$

уравнение (3) упрощается

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\sinh\beta}\Sigma_{\theta\phi} - m \right]\tilde{\Psi} = 0\,. \tag{4}$$

Для диагонализации операторов $i\partial_t, \vec{j}^{\,2}, J_3$ волновая функция берется в виде [20]

$$\tilde{\Psi} = e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} f_1(\chi)\, D_{-1/2} \\ f_2(\chi)\, D_{+1/2} \\ f_3(\chi)\, D_{-1/2} \\ f_4(\chi)\, D_{+1/2} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где функции Вигнера [21] обозначены как $D_{\sigma} = D^{j}_{-m.\sigma}(\phi,\theta,0)$. После разделения переменных получаем четыре радиальных уравнения (пусть $\nu = j+1/2$):

$$\varepsilon f_3 - i\frac{d}{d\beta} f_3 - i\frac{\nu}{\sinh\beta} f_4 - m f_1 = 0\,, \qquad \varepsilon f_4 + i\frac{d}{d\beta} f_4 + i\frac{\nu}{\sinh\beta} f_3 - m f_2 = 0\,,$$

$$\varepsilon f_1 + i\frac{d}{d\beta} f_1 + i\frac{\nu}{\sinh\beta} f_2 - m f_3 = 0\,, \qquad \varepsilon f_2 - i\frac{d}{d\beta} f_2 - i\frac{\nu}{\sinh\beta} f_1 - m f_4 = 0\,. \qquad (6)$$

В базисе сферической тетрады оператор пространственного отражения имеет вид

$$\hat{\Pi}_{sph.} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \otimes \hat{P}.$$

Из уравнения на собственные значения $\hat{\Pi}_{sph.}\,\Psi_{jm} = \Pi\,\Psi_{jm}$ получаем

$$\Pi = \delta\,(-1)^{j+1}, \qquad \delta = \pm 1, \qquad f_4 = \delta\, f_1, \qquad f_3 = \delta\, f_2\,. \qquad (7)$$

При этом (6) упрощается:

$$(\frac{d}{d\beta} + \frac{\nu}{\sinh\beta})\; f + (\varepsilon + \delta m)\; g = 0\,,$$

$$(\frac{d}{d\beta} - \frac{\nu}{\sinh\beta})\; g - (\varepsilon - \delta m)\; f = 0\,. \qquad (8)$$

Здесь вместо f_1 и f_2 использованы новые переменные f и g:

$$f = \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}}\,, \qquad g = \frac{f_1 - f_2}{i\sqrt{2}}\,.$$

2. Уравнение Паули для задачи Кеплера

Исходим из радиальных уравнений свободной частицы (энергия покоя отделяется формальной заменой $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon + m$, и используется приближение $\varepsilon + 2m \approx 2m$ [19])

$$\delta = +1, \qquad (\frac{d}{d\beta} + \frac{\nu}{\sinh\beta})\; f + 2m\, g = 0\,,$$

$$(\frac{d}{d\beta} - \frac{\nu}{\sinh\beta})\; g - \varepsilon\; f = 0\,; \qquad (9)$$

$$\delta = -1, \qquad (\frac{d}{d\beta} + \frac{\nu}{\sinh\beta})\; f + \varepsilon\; g = 0\,,$$

$$(\frac{d}{d\beta} - \frac{\nu}{\sinh\beta})\; g - 2m\; f = 0\,. \qquad (10)$$

В каждом случае получается свое радиальное уравнение Паули для большой компоненты:

$$\delta = +1, \qquad f >> g\,, \qquad \frac{d^2 f}{d\beta^2} - \left(\frac{\nu(\nu + \mathrm{ch}\,\beta)}{\sinh^2\beta} - 2\varepsilon m\right) f = 0\,; \qquad (11)$$

$$\delta = -1, \qquad g >> f\,, \qquad \frac{d^2 g}{d\beta^2} - \left(\frac{\nu(\nu - \mathrm{ch}\,\beta)}{\sinh^2\beta} - 2\varepsilon m\right) g = 0\,. \qquad (12)$$

Соответствующие волновые функции для состояний с различной четностью имеют вид

$$\psi_{jm,\delta=+1} = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{\sinh\beta} \begin{vmatrix} f(\beta)\, D_{-1/2} \\ f(\beta)\, D_{+1/2} \end{vmatrix}, \qquad \psi_{jm,\delta=-1} = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{\sinh\beta} \begin{vmatrix} ig\,(\beta)\, D_{-1/2} \\ -ig\,(\beta)\, D_{+1/2} \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

Теперь рассмотрим задачу в кулоновском поле. Для этого достаточно в (9), (10) сделать формальную замену

$$\delta=+1,\qquad (\frac{d}{d\beta}+\frac{\nu}{\sinh\beta})\ f+2m\,g=0\,,$$

$$(\frac{d}{d\beta}-\frac{\nu}{\sinh\beta})\ g-(\varepsilon+\frac{\alpha}{\tanh\beta})\ f=0\,; \tag{14}$$

$$\delta=-1,\qquad (\frac{d}{d\beta}+\frac{\nu}{\sinh\beta})\ f+(\varepsilon+\frac{\alpha}{\tanh\beta})\ g=0\,,$$

$$(\frac{d}{d\beta}-\frac{\nu}{\sinh\beta})\ g-2m\ f=0\,. \tag{15}$$

Для каждого значения четности получаем свое дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 f}{d\beta^2}-\left(\frac{\nu(\nu+\mathrm{ch}\beta)}{\sinh^2\beta}-2\varepsilon m-\frac{2m\alpha}{\tanh\beta}\right)f=0, \tag{16}$$

$$\frac{d^2 g}{d\beta^2}-\left(\frac{\nu(\nu-\mathrm{ch}\,\beta)}{\sinh^2\beta}-2\varepsilon m-\frac{2m\alpha}{\tanh\beta}\right)g=0\,. \tag{17}$$

Для определенности рассмотрим уравнение (16), случай (17) анализируется аналогично. Введем новую переменную $e^{\beta}=z$. Будем использовать безразмерные величины и следующие обозначения:

$$2\nu\Rightarrow\nu=2j+1,\qquad 2E\Rightarrow E\,,\qquad 2e\Rightarrow e\,, \tag{18}$$

тогда

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d}{dz}-\frac{1}{4}\frac{\nu(\nu-2)}{(z+1)^2}+\frac{E-e}{z^2}+\frac{1}{4}\frac{\nu(\nu+2)+4e}{z-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu}{z}-\frac{1}{4}\frac{\nu(\nu+2)}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{4e+\nu(\nu-2)}{z+1}\right]f=0. \tag{19}$$

Сделаем подстановку $f=z^A(z-1)^B(z+1)^C F(z)$, уравнение (19) примет вид

$$\frac{d^2F}{dz^2}+\left[\frac{2A+1}{z}+\frac{2B}{z-1}+\frac{2C}{z+1}\right]\frac{dF}{dz}+$$

$$+\left[\frac{A^2+E-e}{z^2}+\frac{B^2-B-1/4\nu(\nu+2)}{(z-1)^2}+\frac{C^2-C-1/4\nu(\nu-2)}{(z+1)^2}+\right.$$

$$+\frac{BC+B+2AB+1/4\nu(\nu+2)+e}{z-1}+\frac{C+2AC-B-2AB-\nu}{z}+$$

$$\left.+\frac{-C-2AC-BC-e-1/4\nu(\nu-2)}{z+1}\right]F=0. \tag{20}$$

При A,B,C выбранных согласно

$$A^2+E-e=0\qquad\Rightarrow\qquad A=\pm\sqrt{e-E}\,;$$

$$B^2-B-1/4\nu(\nu+2)=0\qquad\Rightarrow\qquad B=-\frac{1}{2}\nu\,,1+\frac{1}{2}\nu\,;$$

$$C^2-C-1/4\nu(\nu-2)=0\qquad\Rightarrow\qquad C=\frac{1}{2}\nu\,,1-\frac{1}{2}\nu\,, \tag{21}$$

уравнение (20) упрощается

$$\frac{d^2F}{dz^2}+\left[\frac{2A+1}{z}+\frac{2B}{z-1}+\frac{2C}{z+1}\right]\frac{dF}{dz}+$$

$$+\left[\frac{BC+B+2AB+1/4\nu(\nu+2)+e}{z-1}+\frac{C+2AC-B-2AB-\nu}{z}+\right.$$

$$\left.+\frac{-C-2AC-BC-e-1/4\nu(\nu-2)}{z+1}\right]F=0, \tag{22}$$

что является общим уравнением Гойна $G(p,q;\alpha,\beta,\gamma,\delta;z)$ с параметрами

$$p=-1,\qquad q=C+2AC-B-2AB-\nu;$$
$$\gamma=2A+1,\qquad \delta=2B, \tag{23}$$

и

$$\alpha+\beta=2A+2B+2C;$$
$$\alpha\beta=B+C+2(AB+AC+BC)+\frac{1}{2}\nu^2+2e;$$

т. е.

$$\alpha=A+B+C-\sqrt{A^2+B^2+C^2-B-C-1/2\nu^2-2e},$$
$$\beta=A+B+C+\sqrt{A^2+B^2+C^2-B-C-1/2\nu^2-2e}. \tag{24}$$

Пусть

$$A=-\sqrt{e-E};\qquad B=1+\frac{1}{2}\nu;\qquad C=\frac{1}{2}\nu; \tag{25}$$

отрицательное значение A обеспечивает обращение в нуль функции на бесконечности $\chi\to+\infty$. Положительное значение B обеспечивает обращение в нуль функции в начале координат. Тогда

$$\alpha=1+\nu-\sqrt{e-E}-\sqrt{-e-E},\qquad \beta=1+\nu-\sqrt{e-E}+\sqrt{-e-E},$$

или с учетом (18)

$$\alpha=2(j+1)-\sqrt{2e-2E}-\sqrt{-2E-2e},$$
$$\beta=2(j+1)-\sqrt{2e-2E}+\sqrt{-2E-2e}. \tag{26}$$

Наложим дополнительное ограничение

$$\alpha=-2n, \tag{27}$$

что приведет к правилу квантования

$$\sqrt{2e-2E}+\sqrt{-2E-2e}=2(n+j+1),$$

которое дает

$$-E+\sqrt{E^2-e^2}=(n+j+1)^2.$$

Таким образом, мы пришли к формуле для уравнений энергии

$$E=-\frac{e^2}{2(n+j+1)^2}-\frac{(n+j+1)^2}{2}; \tag{28}$$

с помощью (28) можно легко получить довольно простое представление для других параметров функций Гойна

$$\alpha=2(j+1)-N-\frac{e}{N}-N+\frac{e}{N}=-2n,$$
$$\beta=2(j+1)-N-\frac{e}{N}+N-\frac{e}{N}=2(j+1)-\frac{2e}{n+j+1}. \tag{29}$$

Автор благодарна В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schrödinger, E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish. Soc. A. – 1940. – Vol. 46, № 1. – P. 9–16.

2. Stevenson, A.F. A note on the «Kepler problem» in a spherical space, and the factorization method of solving eigenvalue problems / A.F. Stevenson // Phys. Rev. – 1941. – Vol. 59, № 9. – P. 842–843.

3. Infeld, L. A note on the Kepler problem in a space of constant negative curvature / L. Infeld, A. Schild // Phys. Rev. – 1945. – Vol. 67, № 3/4. – P. 121–122.

4. Bessis, N. Electronic wave functions in a space of constant curvature / N. Bessis, G. Bessis // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12, № 11. – P. 1991–1997.

5. Higgs, P.W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I / P.W. Higgs // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12, № 3. – P. 309–323.
6. Leemon, H.I. Dynamical symmetries in a spherical geometry. II / H.I. Leemon // J. Phys. A. – 1979. – Vol. 12, № 14. – P. 489–501.
7. Курочкин, Ю.А. Аналог вектора Рунге–Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере / Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Доклады НАН Беларуси. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 987–990.
8. Богуш, А.А. О квантовомеханической задаче Кеплера в пространстве Лобачевского / А.А. Богуш, Ю.А. Курочкин, В.С. Отчик // Доклады НАН Беларуси. – 1980. – Т. 24, № 1. – С. 19–22.
9. Bessis, N. Atomic fine-structure in a space of constant curvature / J N. Bessis, G. Bessis, R. Shamseddine // Phys. A. – 1982. – Vol. 15, № 10. – P. 3131–3144.
10. Богуш, А.А. Разделение переменных в уравнении Шредингера и нормированные волновые функции в задаче Кеплера в трехмерных пространствах постоянной кривизны / А.А. Богуш, В.С. Отчик, В.М. Редьков // Весці Академии наук БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1983. – С. 56–62.
11. Bessis, N. Space-curvature effects in atomic fine- and hyperfine-structure calculations / N. Bessis, G. Bessis, R. Shamseddine // Phys. Rev. A. – 1984. – Vol. 29, № 5. – P. 2375–2388.
12. Bessis, N. Atomic fine-structure calculations in a space of constant negative curvature / N. Bessis, G. Bessis, D. Roux // Phys. Rev. A. – 1984. – Vol. 30, № 2. – P. 1094–1097.
13. Shamseddine, R. On the resolution of the wave equations of electron in a space of constant curvature / R. Shamseddine // Can. J. Phys. 1997. – P. 805–811.
14. Bogush, A.A. Algebra of conserved operators for the Kepler-Coulomb problem in the spaces of constant curvature / A.A. Bogush, Yu.A. Kurochkin, V.S.Otchik // Yad. Fiz. – 1998. – Vol. 61, № 10. – P. 1889–1892.
15. Nersessian, A. Relation of the oscillator and Coulomb systems on spheres and pseudospheres / A. Nersessian, G. Pogosyan // Phys. Rev. A. – 2001. – Vol. 63, № 2. – P. 020103(R).
16. Red'kov, V.M. On WKB-quantization in Lobachevski and Riemann 3-spaces / V.M. Red'kov // NPCS. – 2003. – Vol. 6, № 2. – P. 654–668.
17. Bogush, A.A. Coulomb scattering in the Lobachevsky space / A.A. Bogush, Yu.A. Kurochkin, V.S. Otchik // NPCS. – 2003. – Vol. 6. – P. 894–897.
18. Kurochkin, Yu. Regge trajectories of the Coulomb potential in the space of constant negative curvature / Yu. Kurochkin, Dz. Shoukavy // J. Math. Phys. – 2006. – Vol. 47, № 2. – P. 022103.
19. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 495 с.
20. Редьков, В.М. Общековариантное уравнение Дирака: сферическая симметрия и D-функции Вигнера, спинорные монопольные гармоники / В.М. Редьков; АН БССР, Ин-т физики. – Минск, 1988. – 39 с. – Деп. в ВИНИТИ 9.03.88, № 4577–В 88 // Весці АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1989. – № 4. – С. 117–118.
21. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Ленинград : Наука, 1975. – 439 с.

***E.M. Ovsiyuk.* Quantum Kepler Problem for Nonrelativistic Spin 1/2 Particle in the Lobachevsky Space, Exact Solutions of the Pauli Eqiation**

Transition to a nonrelativistic Pauli equation in hyperbolic Lobachevsky space for a Dirac particle in presence of the Coulomb field is performed in the system of radial equations. Exact solutions are constructed in terms of Hein functions. The energy spectrum is obtained.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 08.12.2010 г.