УДК 517.956

В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко

МЕТОД ПОГРАНСЛОЯ И УСЛОВИЕ ТИПА ГЮГОНИО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами построены асимптотические однофазовые солитоноподобные решения, с помощью которых получены так называемые условия типа Гюгонио для рассматриваемого уравнения. Методом погранслоя построено решение задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами.

Введение

Одним из фундаментальных уравнений современной теоретической и математической физики является уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad (1)$$

появившееся в связи с попытками получить адекватное математическое описание явления уединенной волны, которую впервые наблюдал в 1834 году шотландский ученый Джон Скотт Рассел [1].

Точное решение уравнения (1), которое описывает движение уединенной волны, имеет вид

$$u(x,t) = u_0 + A\,ch^{-2}(\beta(x-\varphi(t))), \qquad (2)$$

где $\varphi(t) = (a^2 + 6u_0)t$, $A = \frac{a^2}{2}$, $\beta = \frac{a}{2}$. Здесь $a > 0$, u_0 – некоторые константы.

Как оказалось, уравнение Кортевега–де Фриза описывает ряд самых разнообразных явлений и процессов: в частности, это уравнение используется для описания ионно-звуковых и магнитогидродинамических волн в плазме, волн в ангармонической решетке и многих других [3].

Как известно [2], Д. Кортевег и Дж. де Фриз нашли периодические волновые решения уравнения (1), которые имеют несинусоидальную форму и становятся приближенно синусоидальными, если их амплитуда очень мала. При увеличении длины волны эти решения принимают вид далеко расположенных друг от друга возвышенностей на поверхности жидкости, а в предельном случае, при очень большой длине волны, превращаются в одну возвышенность, которой соответствует уединенная волна.

Это уравнение было предложено в 1895 году голландским ученым Д. Дж. Кортевегом и его учеником Дж. де Фризом в работе [2], которая осталась почти не замеченной. Ее быстро забыли, и только лишь отдельные ученые, занимавшиеся задачами гидродинамики, изредка возвращались к рассмотрению уравнения Кортевега–де Фриза и проблеме уединенной волны.

Позже было уделено надлежащее внимание этому уравнению и его создателям, когда в 1995 году в Амстердаме – на родине Д. Кортевега и Дж. де Фриза, была проведена международная научная конференция, посвященная столетию со дня открытия уравнения Кортевега–де Фриза.

В 1965 году уравнение Кортевега–де Фриза оказалось в центре внимания физиков и математиков, когда известные американские ученые М. Крускал и Н. Забуски предложили [4] решение проблемы Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улама [5] и когда ими была обнаружена связь уравнений цепочки Тоды [6], которую исследовали Э. Ферми, Дж. Паста и С. Улам, с уравнением Кортевега–де Фриза.

Изучая позже при помощи численных экспериментов уравнение Кортевега–де Фриза для случая малой дисперсии, то есть при наличии малого параметра при старшей производной в (1), М. Крускал и Н. Забуски [4] математически обосновали многие физические свойства уединенной волны, экспериментально открытые Дж. Скоттом Расселом, и сформулировали определение солитона [4].

В связи с уравнением Кортевега–де Фриза следует также упомянуть классическую работу К.С. Гарднера, Дж.М. Грина, М.Д. Крускала и Р.М. Миуры [7], где впервые был предложен так называемый метод спектрального преобразования для решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза, и работу П. Лакса [8], где указан общий характер этого метода.

Это вызвало бурное развитие нового направления в современной математической физике – математической теории солитонов, основы которой были заложены работами многих ученых по исследованию уравнения Кортевега–де Фриза [9].

Как известно, при исследовании разнообразных задач квантовой механики [10], нелинейной теории распространения волн [11], физики плазмы [3] возникает необходимость изучения волновых процессов как в средах с малой дисперсией, так и в неоднородных средах.

Наиболее простой моделью, описывающей волновые процессы в средах с малой вязкостью ε, является уравнение Бюргерса

$$u_t + \frac{1}{2}\left(u^2\right)_x - \varepsilon u_{xx} = 0, \qquad (3)$$

которое, как известно [12], при помощи подстановки Коула–Хопфа сводится к уравнению теплопроводности.

Эта процедура позволяет получить точные решения уравнения (3) и изучить многие специфические эффекты в гидродинамике сред с малой вязкостью, в частности, явления опрокидывания волн и ударной волны. Кроме того, использование формул для точных решений уравнения (3) позволяет проанализировать асимптотические свойства (при $\varepsilon \to 0$) этих решений и указать такие решения уравнения (3), которые стремятся (поточечно) при $\varepsilon \to 0$ к некоторому разрывному решению. Заметим, что такой сценарий асимптотического поведения решений уравнения (3) свойственен именно ударной волне [12].

Для более сложных систем, например, для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами, системы Навье–Стокса с малой вязкостью и других уравнений с частными производными, содержащих малый параметр, не всегда удается найти их точное решение, а поэтому для анализа свойств их решений используются различные асимптотические методы малого параметра [13–24], применение которых часто основывается на использовании формул для точных решений соответствующей порождающей (невозмущенной, $\varepsilon = 0$) задачи, представляющие предельное (при $\varepsilon \to 0$) значение решения возмущенной задачи. При этом решение соответствующей порождающей задачи часто является разрывной функцией, как это видно в [12] на примере уравнения Бюргерса (3).

Задача нахождения асимптотических решений для дифференциальных уравнений с малым параметром решалась при помощи различных методов: в [13] при построении асимптотических решений для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами применялся метод усреднения; в [14] при построении так называемых асимптотических однофазовых и многофазовых солитоноподобных решений для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с частными производными Г. Венцель, Х. Крамер и Л. Бриллюэн предложили метод, впоследствии получивший название метода ВКБ, который позже применялся Г.Б. Уиземом [15] и М.Дж. Лайтхиллом [16] при изучении задач о распространении периодических волн; в [17] при исследовании задач теории нелинейных колебаний использовался метод усреднения; в [18] при помощи принципа сглаживания, итерационного варианта метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова и метода усреднения изучались регулярные по малому параметру многочастотные системы дифференциальных уравнений с медленными и быстрыми фазовыми переменными, в которых возможны резонансные соотношения между основными частотами; в [19; 20] В.П. Маслов, Г.А. Омельянов и С.Ю. Доброхотов получили солитоноподобные решения для ряда нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными математической и теоретической физики и обосновали для рассмотренных ими уравнений идею построения асимптотических разложений для солитоноподобных решений; в [21] построено асимптотическое решение типа погранслоя краевой задачи для линейного эллиптического уравнения.

Асимптотические разложения возникают также при построении быстро осциллирующих асимптотических решений линейных и нелинейных уравнений [22], асимптотики функции Грина для параболических уравнений [23], асимптотических быстроубывающих решений для строго гиперболических систем с переменными коэффициентами [24], а также в других случаях.

Математические модели, основанные на уравнении Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной, описывают волновые процессы в средах с малой дисперсией [25; 26], поэтому представляет значительный интерес решение задачи о построении асимптотических разложений для указанного типа уравнений, поскольку такие решения можно использовать при анализе важных физических явлений. В частности, Е.С. Бенилов, Р. Гримшоу и Е.П. Кузнецова [27] рассмотрели уравнение Кортевега–де Фриза пятого порядка с малым параметром при старшей производной и исследовали устойчивость нелокальной уединенной волны для этого уравнения.

Несмотря на то, что уравнение Коревега–де Фриза привело к возникновению теории обратной задачи рассеивания, которая стала важным инструментом исследования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, эта теория не позволяет найти точные решения уравнения Коревега–де Фриза в случае переменных коэффициентов. Поэтому для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами используют асимптотические методы, которые позволяют найти приближенные решения.

Данная работа посвящена рассмотрению вопроса об асимптотических однофазовых солитоноподобных решениях (см. определение 1) сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэфициентами вида

$$\varepsilon^{N_0} u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \quad N_0 \in \mathbf{N}, \tag{4}$$

где функции $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ представимы рядами

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

$a_k(x)$, $b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, $k \ge 0$; $t \in [0;T]$; $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Сначала в данной работе построено асимптотическое однофазовое солитоноподобное решение уравнения (4) (в классе быстроубывающих функций, без учета какихлибо начальных условий), затем полученные формулы для асимптотического однофазового солитоноподобного решения и главный член асимптотики используются для вывода так называемых условий типа Гюгонио (для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза (4)).

Эти условия представляют достаточные условия существования некоторых специальных разрывных решений квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, являющегося порождающим для уравнения Кортевега–де Фриза (получаемого из (4) при $\varepsilon = 0$).

В завершение статьи при помощи метода погранслоя получено решение задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (4) в виде асимптотической однофазовой солитоноподобной функции (в классе быстроубывающих функций). Часть результатов данной статьи ранее получена в работах авторов.

1. Асимптотические решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами

Пусть $G = G(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, удовлетворяющих равномерно по переменным (x,t) на каждом компакте $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ для произвольных неотрицательных целых чисел n, m, q, α следующим двум условиям [28]:

1) имеет место соотношение

$$\lim_{\tau\to+\infty}\tau^n\frac{\partial^{m+q+\alpha}}{\partial x^m\partial t^q\partial\tau^\alpha}f(x,t,\tau)=0,\quad (x,t)\in K,$$

2) существует бесконечно дифференцируемая функция $f^-(x,t)$ такая, что

$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n\frac{\partial^{m+q+\alpha}}{\partial x^m\partial t^q\partial\tau^\alpha}(f(x,t,\tau)-f^-(x,t))=0,\quad (x,t)\in K.$$

Обозначим через $G_0 = G_0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})\subset G$ пространство функций $f(x,t,\tau)$, удовлетворяющих равномерно по переменным (x,t) на каждом компакте $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ соотношению

$$\lim_{\tau\to-\infty}f(x,t,\tau)=0,\quad (x,t)\in K.$$

Определение 1 [28]. *Функция $u=u(x,t,\varepsilon)$ называется асимптотической однофазовой солитоноподобной, если для каждого целого числа $N>0$ эта функция $u(x,t,\varepsilon)$ представима с помощью асимптотического разложения по малому параметру ε следующего вида:*

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right]+O(\varepsilon^{N+1}),\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},$$

где $\varphi(t)\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}\times[0;T])$ – скалярная действительная функция; функции $u_j(x,t)$, $j=\overline{0,N}$, – бесконечно дифференцируемы, причем в точках $t=0$, $t=T$ рассматриваются соответственно левая и правая производные; $V_0(x,t,\tau)\in G_0$; $V_j(x,t,\tau)\in G$, $j=\overline{1,N}$.

Функция $S(x,t)=x-\varphi(t)$ называется фазой однофазовой солитоноподобной функции $u(x,t,\varepsilon)$ и определяет линию разрыва $\Gamma=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]: x=\varphi(t)\}$ некоторого разрывного решения уравнения $a_0(x)u_t+b_0(x)uu_t=0$.

В дальнейшем используются некоторые обозначения из асимптотического анализа [29]. В частности, асимптотическое равенство $\Psi(x,t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^N\right)$ при $\varepsilon\to 0$ для $(x,t)\in K$ понимается в том смысле, что существуют некоторое значение $\varepsilon_0>0$ и постоянная $C>0$ такие, что выполняется неравенство $|\Psi(x,t,\varepsilon)|\le C\varepsilon^N$ для всех $(x,t)\in K$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$.

Вид асимптотического однофазового солитоноподобного решения уравнения (4) зависит от порядка сингулярности в (4), т.е. числа N_0, а именно [30–33]:

если число N_0 четное, то

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right)+O(\varepsilon^{N+1}),\quad \tau=(x-\varphi(t))/\varepsilon^{\frac{N_0}{2}};$$

если число N_0 нечетное, то

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right)+O(\varepsilon^{N+1})\quad \text{при}\quad N\le\left[\frac{N_0}{2}\right],$$

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{N_0}{2}\right]}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right)+$$

$$+\sum_{j=\left[\frac{N_0}{2}+1\right]}^{2N}\varepsilon^{\frac{j}{2}}\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right)+O(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}})\quad \text{при}\quad N>\left[\frac{N_0}{2}\right].$$

Здесь $u_j(x,t)$, $V_j(x,t,\tau)$, $j\ge 0$ – некоторые функции, определяемые в процессе построения асимптотического решения.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $N_0=2$ и опишем алгоритм построения асимптотического однофазового солитоноподобного решения уравнения (4) для $N_0=2$. Это решение ищем в виде следующего асимптотического ряда:

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right)+O(\varepsilon^{N+1}),\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}. \tag{5}$$

В соответствии с общей методологией построения асимптотических решений подставим разложение (5) в уравнение (4) и, умножив полученное соотношение на ε, находим:

$$\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3}\right)+3\varepsilon\frac{\partial^3 V_N}{\partial x\partial\tau^2}+3\varepsilon^2\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2\partial\tau}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau^3}- \tag{6}$$

$$-a(x,\varepsilon)\left(\varepsilon\frac{\partial U_N}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial V_N}{\partial t}-\varphi'(t)\frac{\partial V_N}{\partial\tau}\right)-$$

$$-b(x,\varepsilon)(U_N+V_N)\left(\varepsilon\frac{\partial U_N}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial V_N}{\partial x}+\frac{\partial V_N}{\partial\tau}\right)=O\left(\varepsilon^{N+2}\right),\quad \varepsilon\to 0.$$

Здесь использованы обозначения:

$$U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$$

для регулярной части асимптотики (5) и

$$V_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(x,t,\tau)$$

для сингулярной части асимптотики (5), $\tau=(x-\varphi(t))/\varepsilon$.

Учитывая, что $V_0(x,t,\tau)\in G_0$; $V_j(x,t,\tau)\in G$, $j=\overline{1,N}$, уравнения для регулярной части асимптотики получим из (6) при $\tau\to+\infty$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε в левой и правой частях полученного равенства, для определения коэффициентов регулярной части асимптотики находим систему дифференциальных уравнений с частными производными следующего вида:

$$a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}=0, \tag{7}$$

$$a_0(x)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_0(x)u_j(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}=f_j(x,t),\quad j=\overline{1,N}, \tag{8}$$

где функции $f_j(x,t)=f_j(x,t,u_0(x,t),u_1(x,t),...,u_{j-1}(x,t)),\quad j=\overline{1,N}$, определяются рекуррентным образом.

Полученная система состоит из одного квазилинейного дифференциального уравнения (7) и линейных дифференциальных уравнений вида (8), которые при каждом $j=\overline{1,N}$ при весьма общих условиях имеют бесконечно дифференцируемые решения.

В дальнейшем предполагается, что уравнения (7), (8) имеет бесконечно дифференцируемые решения для всех $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$. Другими словами, задача о построении регулярной части асимптотики (5) может считаться решенной.

Сингулярная часть асимптотики (5) определяется из системы уравнений:

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau^3}+a_0(x)\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(x)\left[u_0(x,t)\frac{\partial V_0}{\partial\tau}+V_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau}\right]=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau^3}+a_0(x)\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(x)\left[u_0(x,t)\frac{\partial V_j}{\partial\tau}+V_j\frac{\partial V_0}{\partial\tau}+V_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\right]=F_j(x,t,\tau), \tag{10}$$

где $F_j(x,t,\tau)=F_j(t,V_0(x,t,\tau),...,V_{j-1}(x,t,\tau),u_0(x,t),...,u_j(x,t)),\quad j=\overline{1,N}.$

Задача о разрешимости системы уравнений (9), (10) является более сложной, чем задача о разрешимости системы уравнений (7), (8), поскольку система (9), (10), кроме неизвестных функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, содержит также неизвестную функцию $\varphi(t)$, с помощью которой определяется линия разрыва Γ.

Задача об определении функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, из системы (9), (10) решается следующим образом [28]: сначала определяются значения этих функций на линии разрыва Γ, а затем эти функции продолжаются непрерывно дифференцируемым образом в некоторую окрестность этой линии и в последующем «вкладываются» в пространство быстро убывающих функций.

На линии разрыва Γ функции $v_j(t,\tau)=V_j(\varphi(t),t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, определяются как решения системы дифференциальных уравнений с частными производными вида:

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi(t))\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(\varphi(t))\left[u_0(\varphi(t),t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right]=0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi(t))\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(\varphi(t))\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}+v_j\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\right]=$$

$$=F_j(t,\tau),\quad j=\overline{1,N}, \tag{12}$$

где

$$F_j(t,\tau)=F_j(t,V_0(x,t,\tau),...,V_{j-1}(x,t,\tau),u_0(x,t),...,u_j(x,t))\,|_{x=\varphi(t)},$$

$$j=\overline{1,N}.$$

Уравнение (11) в пространстве G_0 имеет единственное решение следующего вида

$$v_0(t,\tau) = -3\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))}ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}(\tau + c_0)\right),$$

где

$$A(\varphi(t),t) = -a_0(\varphi(t))\varphi'(t) + b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t) > 0, \quad c_0 = c_0(t). \tag{13}$$

В случае, когда $F_j(t,\tau) \in G_0$, $j = \overline{1,N}$, необходимым и достаточным условием существования в пространстве G решений уравнений системы (12) (при каждом $j = \overline{1,N}$) является условие ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau = 0, \quad j = \overline{1,N}. \tag{14}$$

Для доказательства того, что условие (14) является необходимым и достаточным условием существования решений уравнений системы (12), достаточно записать решение каждого уравнения (12) в следующем виде

$$v_j(t,\tau) = \nu_j(t)\eta_j(t,\tau) + \psi_j(t,\tau), \quad j = \overline{1,N}, \tag{15}$$

где

$$\nu_j(t) = [a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t),t)]^{-1} \lim_{\tau\to-\infty} \Phi_j(t,\tau),$$

$$\Phi_j(t,\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} F_j(t,\xi)d\xi + E_j(t),$$

постоянная интегрирования $E_j(t)$ определяется из условия

$$\lim_{\tau\to+\infty} \Phi_j(t,\tau) = 0;$$

функция $\eta_j(t,\tau) \in G$ удовлетворяет дополнительному условию $\lim_{\tau\to-\infty} \eta_j(t,\tau) = 1$, а затем показать эквивалентность условия $\psi_j(t,\tau) \in G_0$ условию (14).

В самом деле, рассмотрим вспомогательное уравнение, полученное из (12) при помощи интегрирования по τ (в пределах от $-\infty$ до τ):

$$L_1 v_j = \Phi_j(t,\tau), \tag{16}$$

где

$$L_1 = \frac{d^2}{d\tau^2} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t) - b_0(\varphi(t))v_0(t,\tau).$$

Из равенств (15), (16) следует, что функция $\psi_j(t,\tau)$ удовлетворяет уравнение

$$L_1\psi_j = \Phi_j - \nu_j L_1\eta.$$

Поскольку оператор $L_1 : (G_0)^* \to (G_0)^*$ является нетеровым, т.е. область его значений является замкнутым множеством, размерности его ядра и дополнения к области его значений конечны, а $KerL_1^* = \{v_{0\tau}\}$, то $\psi_j \in G_0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие ортогональности [10]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Phi_j - \nu_j L_1\eta\right) v_{0\tau} d\tau = 0,$$

эквивалентное условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau = 0, \quad j = \overline{1,N},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, задача о нахождении функций $v_j(t,\tau)=V_j(\varphi(t),t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, может считаться решенной.

Условия ортогональности (14) можно использовать для определения линии разрыва, а именно: из (14) при $j=1$ следует уравнение для определения функции $\varphi(t)$, имеющее следующий вид:

$$15a_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}A(\varphi(t),t)-20a_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))\varphi'(t)A(\varphi(t),t)+$$
$$+10b_0^2(\varphi(t))u'_{0x}(\varphi(t),t)A(\varphi(t),(t))+10A(\varphi(t),t)b_0(\varphi(t))a_0(\varphi(t))\varphi'(t)-$$
$$-10A(\varphi(t),t)b_0(\varphi(t))b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)+16b_0(\varphi(t))A^2(\varphi(t),t)=0, \qquad (17)$$

где $A(\varphi(t),t)$ имеет вид (13).

Уравнение (17) является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, имеющим решение $\varphi=\varphi(t)$ при весьма общих условиях. В дальнейшем считается, что функция $\varphi(t)$ известна.

Для продолжения функции $v_j(t,\tau)=V_j(\varphi(t),t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, с кривой Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)=\{(x,t):|x-\varphi(t)|<2\mu\}$, где μ – некоторое достаточно малое число, воспользуемся представлением (15) и рассмотрим функцию $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{0,N}$, в следующем виде:

$$V_j(x,t,\tau)=w_j^-(x,t)\eta_j(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),\quad j=\overline{1,N}, \qquad (18)$$

где $w_j^-(x,t)$, $j=\overline{1,N}$ – решение линейного дифференциального уравнения с частными производными

$$\Lambda w_j^-(x,t)=f_j^-(x,t), \qquad (19)$$

где

$$\Lambda=a_0(x)\frac{\partial}{\partial t}+b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+b_0(x)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x},$$

с начальным условием на линии разрыва Γ

$$w_j^-(x,t)|_\Gamma=v_j(t),\quad j=\overline{1,N}. \qquad (20)$$

Здесь $f_1^-(x,t)=0$, а функции $f_j^-(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, рекуррентно определяются по функциям $f_k^-(x,t)$, $k=\overline{1,j-1}$.

Уравнение (19) получено из асимптотического соотношения (6) после подстановки представления (18) в (6) и дальнейшего перехода к пределу при $\tau\to-\infty$.

Задача Коши (19), (20) удовлетворяет всем условиям теоремы Коши–Ковалевской, поэтому в соответствии с этой теоремой данная задача имеет, по крайней мере, в некоторой окрестности кривой Γ – области $\Omega_\mu(\Gamma)$, единственное аналитическое решение.

Если решение задачи Коши (19, 20) определено только в области $\Omega_\mu(\Gamma)$, то N-тое приближение асимптотического однофазового солитоноподобного решения уравнения Кортевега–де Фриза (4) представимо формулой:

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(t,\tau)\right],(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]. \qquad (21)$$

Заметим, что функция (21) удовлетворяет асимптотическому равенству (6) при $\tau\to-\infty$ с точностью $O(\varepsilon^{N+1})$.

Если же функции $w_j^-(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, как решения задачи Коши (19), (20) определены не только в области $\Omega_\mu(\Gamma)$, а и в области $\{(x,t): x-\varphi(t)\le -\mu,\ t\in[0;T]\}$, то N-тое приближение асимптотического однофазового солитоноподобного решения уравнения Кортевега–де Фриза (4) представимо формулой:

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)\right], & (x,t)\in\Omega_\mu(\Gamma),\\ u_0(x,t)+\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+w_j^-(x,t)\right], & (x,t)\in D^-\setminus\Omega_\mu(\Gamma),\\ \sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t), & (x,t)\in D^+\setminus\Omega_\mu(\Gamma),\end{cases}\tag{22}$$

где

$$D^-=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:\varphi(t)-x\ge\mu\},$$
$$D^+=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:x-\varphi(t)\le\mu\}.$$

При этом функция (22) удовлетворяет асимптотическому равенству (6) при $\tau\to-\infty$ с точностью $O(\varepsilon^{N+2})$.

2. Условие типа Гюгонио

Порождающее (при $\varepsilon=0$) и исходное (4) уравнения являются дифференциальными уравнениями различного типа: они имеют не только различные порядки как дифференциальные уравнения, но и соответственно различную структуру решений, что, например, проявляется при предельном переходе в формулах для решений исходного (возмущенного) уравнения, когда значение малого параметра стремится к нулю.

Известно, что если сингулярно возмущенное уравнение обладает гладким по переменным x,t решением, то в пределе, при стремлении малого параметра к нулю, это решение может иметь своим пределом разрывную (по переменным x,t) функцию.

Рассмотрим в качестве примера сингулярно возмущенное уравнение Бюргерса, имеющее важное значение в гидродинамике [12]:

$$u_t+uu_x-\varepsilon u_{xx}=0,\quad x\in\mathbf{R},\quad t\in[0;T],$$

точное решение которого представляется формулой

$$u(x,t,\varepsilon)=2a\left(1-th\left(\frac{a(x-\varphi(t))}{\varepsilon}\right)\right),\tag{23}$$

где $\varphi(t)=2at$, $a>0$ – произвольная постоянная.

Очевидно, что функция (23) является гладкой по переменным x,t при $\varepsilon\ne0$.

При $\varepsilon\to0$ решение $u(x,t,\varepsilon)$ стремится к разрывной функции $u_0(x,t)$, где

$$u_0(x,t)=\begin{cases}0, & x>\varphi(t),\\ 4a, & x<\varphi(t),\end{cases}\tag{24}$$

удовлетворяющей порождающему уравнению

$$u_t+uu_x=0.\tag{25}$$

Обозначим

$$\left[u(x,t)\big|_{x=\varphi(t)}\right]=u(\varphi(t)+0,t)-u(\varphi(t)-0,t).$$

Тогда известное в гидродинамике условие Гюгонио, связывающее между собой значение скорости $\varphi'(t)$ распространения прямой волны, описываемой уравнением

Бюргерса, и значения разрывного решения $u_0(x,t)$ слева (до кривой разрыва) и справа (после кривой разрыва) на кривой разрыва для его порождающего уравнения, можно записать в следующем виде:

$$\left[u(x,t)\Big|_{x=\varphi(t)}\right]\varphi_t' = \frac{1}{2}[u^2(x,t)\Big|_{x=\varphi(t)}], \qquad (26)$$

т.е. условие Гюгонио связано с задачей существования так называемых разрывных решений некоторых дифференциальных уравнений с частными производными, являющимися порождающими уравнениями для некоторых сингулярно возмущенных уравнений с частными производными.

Пусть L_ε – некоторый дифференциальный оператор, непрерывно зависящий от параметра $\varepsilon \in (-\varepsilon_0;\varepsilon_0)$, дифференциальный оператор $L_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon$ – его предельное значение (предел понимается в классическом смысле), причем порядок оператора L_0 ниже порядка оператора L_ε.

Как и в [28], разрывным решением дифференциального уравнения вида $L_0 u = 0$ будем называть такую разрывную функцию $u_0(x,t)$, для которой $L_0 u_0(x,t) = 0$ во всех точках непрерывной дифференцируемости функции $u_0(x,t)$ (считается, что в этих точках корректно определено действие оператора L_0 на $u_0(x,t)$), а в некоторой достаточно малой проколотой окрестности каждой точки разрыва $u_0(x,t)$ данная функция является пределом некоторого решения $u(x,t,\varepsilon)$ уравнения $L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) = 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = u_0(x,t)$.

Рассмотрим пример разрывного решения линейного уравнения вида

$$u_t + cu_x = 0, \qquad (27)$$

где $c = c(x,t)$ – некоторая непрерывная функция.

Пусть требуется построить решение уравнения (27), имеющее разрыв на некоторой линии $S(x,t) = 0$, являющейся пока неизвестной (функция $S(x,t)$ определяется в процессе построения решения). Подобное разрывное решение естественно представить с помощью функции Хевисайда

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \ge 0, \\ -1, & \tau < 0, \end{cases}$$

в виде

$$u(x,t) = \Theta(S)\Psi(x,S,t), \qquad (28)$$

где

$$\Psi(x,S,t) = \psi_1 + S\psi_2 + S^2\psi_3 + \ldots, \quad S = S(x,t),$$

$\psi_1 = \psi_1(x,t)$, $\psi_2 = \psi_2(x,t)$, …, – пока неизвестные функции, определяемые последовательно или с помощью дельта-функции Дирака и функции Хевисайда, в соответствии с подходом Р. Куранта [35], в следующем виде:

$$u(x,t) = \delta(S)\psi_0(x,t) + \Theta(S)\Psi(x,S,t), \qquad (29)$$

где $\delta(S)$ – дельта-функция Дирака, $\psi_0 = \psi_0(x,t)$ – пока неизвестная функция.

После подстановки (29) в (27) получаем уравнение вида:

$$(S_t + cS_x)\delta'(S)\psi_0 + [\psi_{0t} + c\psi_{0x} + (S_t + cS_x)\Psi(x,S,t)]\delta(S) +$$
$$+\Theta(S)\{\Psi_t + c\Psi_x + (S_t + cS_x)\Psi_S\} = 0, \qquad (30)$$

откуда, после приравнивания коэффициентов при $\delta'(S)$, $\delta(S)$ и $\Theta(S)$ к нулю, можно получить дифференциальные уравнения для определения функций $S = S(x,t)$, $\Psi(x,S,t)$ и $\psi_0 = \psi_0(x,t)$, причем эти функции можно искать уже в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Однако подход Р. Куранта не применим при нахождении разрывных решений нелинейных уравнений даже в случае квазилинейного дифференциального уравнения первого порядка. Действительно, если разрывное решение порождающего ($\varepsilon = 0$) уравнения для (3) искать в виде (29), то после подстановки $u(x,t)$ вида (29) в (25) возникает проблема, связанная с корректным определением произведения обобщенных функций $\Theta(S)\delta(S)$, которое, вообше говоря, не определено, поскольку зависит от способа аппроксимации обобщенных функций $\Theta(S)$ и $\delta(S)$.

В связи с проблемой определения произведения обобщенных функций следует упомянуть работу В.К. Иванова [36], где был предложен подход к определению произведения обобщенных функций, позволивший решить ряд задач, связанных с нахождением разрывных решений квазилинейных уравнений, и, таким образом, изучить ряд задач для некоторых важных классов дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих малый параметр при старшей производной.

С другой стороны, при построении специальных разрывных решений нелинейных дифференциальных уравнений можно воспользоваться методом сингулярных возмущений [37], при котором вместо исходного уравнения рассматривается некоторое сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение более высокого порядка с малым параметром при старшей производной (такое сингулярно возмущенное уравнение при нулевом значении малого параметра превращается в исходное дифференциальное уравнение). Затем строится аналитическое решение сингулярно возмущенного уравнения и рассматривается его предельное значение при стремлении малого параметра к нулю. Вследствие наличия сингулярностей в построенном аналитическом решении предельная (при стремлении малого параметра к нулю) функция будет иметь разрыв на некоторой кривой. Отметим, что вместо аналитического решения можно использовать его асимптотическое представление.

Указанную идею продемонстрируем на примере квазилинейного дифференциального уравнения вида

$$u_t + 6uu_x = 0,$$

являющегося порождающим уравнением для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза:

$$u_t + 6uu_x + \varepsilon^2 u_{xxx} = 0. \tag{31}$$

Точное решение уравнения (31) имеет вид:

$$u(x,t,\varepsilon) = A\,ch^{-2}\left(\frac{\beta(x-\varphi(t))}{\varepsilon}\right), \tag{32}$$

где $A = \frac{a^2}{2}$, $\beta = \frac{a}{2}$, $\varphi(t) = a^2 t$, a – некоторая постоянная, $\varepsilon \neq 0$.

Для решения (32) имеют место соотношения:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} A, & x = \varphi(t), \\ 0, & x \neq \varphi(t), \end{cases} \tag{34}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} u(x,t,\varepsilon) = 2\frac{A}{\beta}\delta(x-\varphi(t)), \tag{35}$$

где $\delta(x-\varphi(t))$ – дельта-функция Дирака.

Подставив (32) в уравнение (31), разделив обе его части на ε и устремив $\varepsilon \to 0$, получим соотношение, аналогичное соотношению (30):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big(u_t(x,t,\varepsilon)-3(u^2(x,t,\varepsilon))_x+\varepsilon^2 u_{xxx}(x,t,\varepsilon)\Big)=$$

$$=\left(-2\frac{A}{\beta}\varphi'(t)+4\frac{A^2}{\beta}\right)\delta'(S)=0, \quad (36)$$

откуда, из условия равенства нулю коэффициента при $\delta'(S)$, получаем равенство

$$\varphi'(t)-2A=0. \quad (37)$$

При вычислении предела в (36) использована теорема о пределе суммы величин и равенства, аналогичные (34), (35).

Равенство (37) называется условием типа Гюгонио для уравнения (31) и, очевидно, выполняется в случае, когда решение уравнения (37) представляется формулой (32).

Таким образом, можно предложить следующее определение условия типа Гюгонио.

Определение 4 [38]. *Пусть уравнение*

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon)=0, \quad 0<\varepsilon<<1, \quad (38)$$

где $L_\varepsilon : C^{(\infty)}(\mathbf{R}\times[0;T])\to C^{(\infty)}(\mathbf{R}\times[0;T])$ *– некоторый дифференциальный оператор, имеет асимптотическое решение*

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)+O(\varepsilon^{N+1}), \quad N\ge 1,$$

где $S=S(x,t)\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}\times[0;T]),\ S_x|_\Gamma \ne 0,$

$$\Gamma=\{(x,t)\in \mathbf{R}\times[0;T], S(x,t)=0\}.$$

Тогда, если существует (поточечный по x,t*) предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}L_\varepsilon Y_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0 \quad (39)$$

в пространстве обобщенных функций D'*, то условие (39) называется условием типа Гюгонио для уравнения (38).*

Проиллюстрируем данное определение на примере сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами (4). Для вычисления предела в (39), используя полученные выше формулы (21, 22), представим N-тое приближение асимптотического решения уравнения (4) следующим образом:

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=H_N(x,t,\varepsilon)+\varepsilon F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)+\varepsilon G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right), \quad (40)$$

где $S=x-\varphi(t)$,

$$H_N(x,t,\varepsilon)=\begin{cases} u_0(x,t)+\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+w_j^-(x,t)\right], & (x,t)\in D^-\setminus\Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum\limits_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t) & (x,t)\in D^+\cup\Omega_\mu(\Gamma), \end{cases}$$

если решение задачи Коши (19, 20) определено в области $\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]: x-\varphi(t)\le-\mu\}$; и

$$H_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t),$$

если решение задачи Коши (19), (20) определено только в области $\Omega_\mu(\Gamma)$;

$$F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^{j-1}V_j\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon}\right); \tag{41}$$

$$G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=\frac{1}{\varepsilon}V_0\left(t,\frac{S}{\varepsilon}\right)=-\frac{3}{\varepsilon}\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))}ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}\left(\frac{S}{\varepsilon}+C\right)\right). \tag{42}$$

При помощи прямых вычислений для функций $F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)$, $G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)$ можно получить следующие утверждения.

Лемма 1. *Имеют место соотношения:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=-\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\delta(S);$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon G^2\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=\frac{24A(\varphi(t),t)\sqrt{A(\varphi(t))}}{b_0^2(\varphi(t))}\delta(S);$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial t}G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)\delta(S);$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x}G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial x}G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial^3}{\partial x^j\partial S^{3-j}}G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0,\quad j=\overline{0,3};$$

где предел при $\varepsilon\to 0$ вычисляется в пространстве обобщенных функций D', $\delta(S)$ – функция Дирака.

Лемма 2. *Имеют место соотношения:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=w_1^-(x,t)\theta(S);$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial t}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(w_1^-(x,t)\right)\theta(S);$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial x}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(w_1^-(x,t)\right)\Theta(S);$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial x}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial S}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial S}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=w_1^-(x,t)\delta(S);$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\partial^3}{\partial x^j\partial S^{3-j}}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0,\quad j=\overline{0,3},$$

где предел при $\varepsilon\to 0$ вычисляется в пространстве обобщенных функций D', $\delta(S)$ – функция Дирака, $\Theta(S)$ – функция Хевисайда.

Лемма 3. *Имеют место соотношения:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial x}G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial x}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial S}F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon F_N\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial S}G\left(x,t,\frac{S}{\varepsilon},\varepsilon\right)=0,$$

где предел при $\varepsilon\to 0$ вычисляется в пространстве обобщенных функций D'.

Подставив равенство (40) в уравнение (4), разделив обе части полученного соотношения на ε и устремив $\varepsilon\to 0$, с использованием лемм 1–3, получаем соотношения вида

$$H_1(t)\delta'(S)+H_2(t)\delta(S)+H_3(t)\Theta(S)=0,$$

где

$$H_1(t)=-\varphi'(t)a_0(\varphi(t))+b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)-A(\varphi(t),t),$$

$$H_2(t)=a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)+\varphi'(t)a_0(\varphi(t))w_1^-(\varphi(t),t)+$$

$$+b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t),t)\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)-b_0u_0(\varphi(t),t)w_1^-(\varphi(t),t),$$

$$H_3(t)=a_0(x)\frac{\partial w_1^-(x,t)}{\partial t}+b_0(x)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}w_1^-(x,t)+b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial w_1^-(x,t)}{\partial x}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$-\varphi'(t)a_0(\varphi(t))+b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t),t)-A(\varphi(t),t)=0;\tag{43}$$

$$a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)+\varphi'(t)a_0(\varphi(t))w_1^-(\varphi(t),t)+$$

$$+b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t),t)\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{b_0(\varphi(t))}\right)-b_0u_0(\varphi(t),t)w_1^-(\varphi(t),t)=0;\tag{44}$$

$$a_0(x)\frac{\partial w_1^-(x,t)}{\partial t}+b_0(x)\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}w_1^-(x,t)+b_0(x)u_0(x,t)\frac{\partial w_1^-(x,t)}{\partial x}=0.\tag{45}$$

Равенства (43), (45) выполняются в силу алгоритма построения асимптотического решения.

Из равенства (44) с учетом (43), (45) получаем условие типа Гюгонио для уравнения (4) в виде:

$$a_0(\varphi(t))\frac{d}{dt}\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t}}{b_0(\varphi(t))}\right)+b_0(\varphi(t))u_{0x}(\varphi(t),t)\left(\frac{12\sqrt{A(\varphi(t),t}}{b_0(\varphi(t))}\right)-$$

$$-A(\varphi(t),t)w_1^-(\varphi(t),t)=0, \qquad (46)$$

где $u_0=u_0(x,t)$ – главный член регулярной части асимптотического решения для уравнения (4).

3. Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной вида

$$\varepsilon^2 u_{xxx}=a(x,\varepsilon)u_t+b(x,\varepsilon)uu_x, \qquad (47)$$

$$u(x,0,\varepsilon)=f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad (48)$$

где

$$a(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x)\varepsilon^k,$$

$a_k(x),b_k(x)\in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, $k\ge 0$; функция $f(\eta),\eta\in\mathbf{R},$ – быстроубывающая; $\varepsilon>0$ – малый параметр.

Определение 5 [38–44]. Пусть $G_2^+=G_2^+(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times[0;\theta])$, где $\theta>0$ – некоторое число, – линейное пространство таких бесконечно дифференцируемых функций $f=f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(\tau_1,\tau_2)\in\mathbf{R}\times[0;\theta]$, $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, что для всех целых неотрицательных чисел p, q, r, q_1, q_2 равномерно по переменным (x,t) на каждом компактном множестве $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ выполняется соотношение:

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^r\frac{\partial^{q_1}}{\partial\tau_1^{q_1}}\frac{\partial^{q_2}}{\partial\tau_2^{q_2}}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}f(x,t,\tau_1,\tau_2)=0, \quad (x,t)\in K, \quad \tau_2\in[0;\theta].$$

Асимптотическое решение задачи Коши (47), (48) ищется в виде

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_N(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon^{N+1}), \qquad (49)$$

где

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1)+W_j(\tau_1,\tau_2)\right],$$

$$\tau_1=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \quad \tau_2=\frac{t}{\varepsilon}.$$

Функции регулярной части асимптотики $U_N(x,t,\varepsilon)$ и сингулярной части асимптотики $V_N(x,t,\varepsilon)$ определены выше в п.1.

Линия разрыва определяется из уравнения (17) с начальным условием $\varphi(0)=0$.

Для построения асимптотического решения задачи (47, 48) необходимо определить дополнительную функцию сингулярной части асимптотики $W_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^jW_j(\tau_1,\tau_2)$. Эта функция задана в некоторой окрестности связного множества

$$\{(t,x):t=0,x\in\mathbf{R}\}\cup\{(t,x):x=\varphi(t),t\in[0;T]\}.$$

Для определения функций сингулярной части асимптотики $W_N(\tau_1,\tau_2)$ подставим разложение (49) в уравнение (47) и умножим на ε:

$$\varepsilon^3\left(\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3}\right)+3\varepsilon\frac{\partial^3 V_N}{\partial x\partial\tau_1^2}+3\varepsilon^2\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2\partial\tau_1}+\frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau_1^3}+\frac{\partial W_N}{\partial\tau_1}-$$

$$-a(x,\varepsilon)\left(\varepsilon\frac{\partial U_N}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial V_N}{\partial t}-\varphi'(t)\frac{\partial V_N}{\partial\tau_1}-\varphi'(t)\frac{\partial W_N}{\partial\tau_1}+\frac{\partial W_N}{\partial\tau_2}\right)-$$

$$-b(x,\varepsilon)(U_N+V_N+W_N)\left(\varepsilon\frac{\partial U_N}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial V_N}{\partial x}+\frac{\partial V_N}{\partial\tau_1}+\frac{\partial W_N}{\partial\tau_1}\right)=O\left(\varepsilon^{N+2}\right). \quad (50)$$

Учитывая уравнения для функций $U_N(x,t,\varepsilon)$, $V_N(x,t,\varepsilon)$, из (50) получаем систему уравнений для определения сингулярной части асимптотики $W_N(x,t,\varepsilon)$:

$$\frac{\partial^3 W_0}{\partial\tau_1^3}=-a_0(0)\left[\varphi'(0)\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}-\frac{\partial W_0}{\partial\tau_2}\right]+ \quad (51)$$

$$+b_0(0)\left[V_0(0,\tau_1)\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0(0,\tau_1)}{\partial\tau_1}W_0+W_0\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}\right],$$

$$\frac{\partial^3 W_j}{\partial\tau_1^3}=-a_0(0)\left[\varphi'(0)\frac{\partial W_j}{\partial\tau_1}-\frac{\partial W_j}{\partial\tau_2}\right]+ \quad (52)$$

$$+b_0(0)\left[V_0(0,\tau_1)\frac{\partial W_j}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0(0,\tau_1)}{\partial\tau_1}W_j+\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}W_j+W_0\frac{\partial W_j}{\partial\tau_1}\right]+G_j(\tau_1,\tau_2),$$

где функции $G_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, определяются рекуррентным образом после нахождения функций $W_k(\tau_1,\tau_2),\ k=\overline{0,j-1}.$

Из начального условия (48) имеем:

$$u(x,0,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,0)+\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j\left(x,0,\frac{x}{\varepsilon}\right)+\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j W_j\left(0,\frac{x}{\varepsilon}\right)=f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

откуда, положив

$$u_j(x,0)=0,\quad j=\overline{0,N},$$

$$V_j(x,t,\tau_1)=V_j(t,\tau_1)=v_j(t,\tau_1),\quad j=\overline{0,N},$$

получаем начальные условия для сингулярной части асимптотики $W_j(\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{0,N}$ вида

$$W_0(\tau_1,0)=f(\tau_1)-V_0(0,\tau_1), \quad (53)$$

$$W_j(\tau_1,0)=-V_j(0,\tau_1),\quad j=\overline{1,N}. \quad (54)$$

Система (51), (52) с начальными условиями (53), (54) не является нормальной относительно переменной τ_2, но имеет решение. Используя результаты работы [45], можно доказать следующие утверждения.

Лемма 4. *Уравнение (51) с начальным условием (53) имеет решение* $W_0(\tau_1,\tau_2)$, *принадлежащее пространству* G_2^+.

Лемма 5. *Если функции сингулярной части асимптотики* $V_j(t,\tau_1),\ j=\overline{1,N}$ *являются быстроубывающими функциями по переменной* τ_1 *для произвольного* $t\in[0;T]$, *то задача (52), (54) имеет решение* $W_j(\tau_1,\tau_2)$, *принадлежащее пространству* G_2^+.

Таким образом, установлены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения леммы 5. Тогда при каждом* $N = 0,1,...$ *функция*

$$Y_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left(u_j(x,t) + V_j\left(t, \frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}\right) + W_j\left(\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right)\right),$$

удовлетворяет уравнение (4) с точностью $O(\varepsilon^N)$, *а начальное условие (48) – с точностью* $O(\varepsilon^{N+1})$ *при* $0 \le t \le \varepsilon\Theta$.

Теорема 2. *Пусть функции* $a(x,\varepsilon), b(x,\varepsilon)$ *принадлежат пространству* G_0 *для* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, *функция* $a(x,\varepsilon) < 0$ *для всех* $x \in \mathbf{R}$ *и для всех* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$. *Тогда для точного решения* $u(x,t,\varepsilon)$ *задачи (47), (48) и его* N *-того асимптотического приближения* $Y_N(x,t,\varepsilon)$ *имеет место оценка следующего вида:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[u(x,t,\varepsilon) - Y_N(x,t,\varepsilon)\right]^2 dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x,\varepsilon)dx, \quad t \in [0;\varepsilon\theta),$$

где $h(x,\varepsilon) \in G_0$ *– некоторая функция, для которой выполняется неравенство* $|h(x,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{N+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scott-Russel, J. Report on waves / J. Scott-Russel // Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. – London: John Murray, 1834. – P. 311–390.

2. Korteweg, D.J. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, G. de Vries // Philos. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422–433.

3. Скотт, Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Э. Скотт. – М. : Советское радио, 1977. – 368 с.

4. Zabusky, N.J. Interaction of «solitons» in a collision less plasma and the recurrence of initial states / N.J. Zabusky, M.D. Kruskal // Phys.Rev. Lett. – Vol.15. – P.240 –

5. Ферми, Э. Изучение нелинейных задач / Э. Ферми, Дж. Паста, С. Улам // Ферми Э. Научные труды. В 2-х т. – Т. 2. – М. : Наука, 1972. – 256 с.

6. Toda, M. Waves in nonlinear lattice / M. Toda // Suppl. Theory Phys. – 1970. – № 45. – P. 174–200.

7. Gardner, C.S. Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C.S. Gardner [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 19. – P. 1095–1098.

8. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves / P.D. Lax // Commun. Pure Appl. Mathem. – 1968. – Vol. 21, № 15. – P. 467–490.

9. Самойленко, В.Г. Волна трансляции и математическая теория солитонов / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Математический вестник НТШ. – 2006. – Т.3. – С.126–148.

10. Маслов, В.П. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики / В.П. Маслов, М.В. Федорюк. – М. : Наука, 1976. – 296 с.

11. Баренблатта, Г.И. Нелинейная теория распространения волн / Г.И. Баренблатт. – М. : Мир, 1970. – 231 с.

12. Коул, Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул. – М. : Мир, 1972. – 276 с.

13. Марченко, В.А. Краевые задачи в областях с мелкозернистой структурой / В.А. Марченко, Е.Я. Хруслов. – К. : Наукова думка, 1974. – 279 с.

14. Ломов, С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – М. : Наука, 1981. – 400 с.

15. Whitham, G.B. Non-linear dispersive waves / G.B. Whitham // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1965. – № 283. – P. 238–261.

16. Lighthill, M.J. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid / M.J. Lighthill // Phil. Mag. – 1949. – Vol. 40. – P. 1179–1201.

17. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М. : Наука, 1964. – 540 с.

18. Гребеников, Е.А. Введение в резонансную аналитическую динамику / Е.А. Гребеников, Ю.А. Митропольский, Ю.А. Рябов. – М. : Янус, 1999. – 302 с.

19. Доброхотов, С.Ю. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях / С.Ю. Доброхотов, В.П. Маслов // Современные проблемы математики. – М. : ВИНИТИ, 1980. – Вып. 5. – С. 3–94.

20. Маслов, В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях / В.П. Маслов. – М. : Наука, 1977. – 384 с.

21. Вишик, М.И. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи матем. наук. – 1960. – Вып. 5 (121). – С. 778–781.

22. Маслов, В.П. Операторные методы / В.П. Маслов. – М. : Наука, 1973. – 543 с.

23. Данилов, В.Г. Туннельный метод ВКБ построения асимптотики функции Грина для параболических уравнений / В.Г. Данилов, С.М. Фроловичев // Доклады РАН. – 2001. – Т. 379, № 5. – С. 591–594.

24. Доброхотов, С.Ю. Асимптотические быстро убывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами / С.Ю. Доброхотов [и др.] // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49, № 4.– С. 31–46.

25. Омельянов, Г.А. Взаимодействие волн разных масштабов в газовой динамике / Г.А. Омельянов // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, № 1. – С. 148–151.

26. Dobrokhotov, S.Yu. Hugoniot–Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations / S.Yu. Dobrokhotov // Russian J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 6, № 2. – P. 137–173.

27. Benilov, E.S. The generation of radiating waves in a singularly perturbed Korteweg-de Vries equation / E.S. Benilov, R. Grimshaw, E.P. Kuznetsova // Physica D. – 1993. – Vol. 69, № 3–4. – P. 270–278.

28. Maslov, V.P. Geometric asymptotics for PDE. I. / V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov. – Providence : AMS. – 2001. – 243 p.

29. де Брейн, Н.Г. Асимптотические методы в анализе / Н.Г. де Брейн. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 248 с.

30. Самойленко, В.Г. Асимптотические разложения однофазовых солитоноподобных решений уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, № 1. – С. 111–124.

31. Samoilenko, YuI. Asymptotical expansion for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg–de Vries equation / YuI. Samoilenko // Proceedings of the Fifth International Conference «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics» – K. : Institute of Mathematics. – 2004. – Т. 3. – P. 1435–1441.

32. Самойленко, В.Г. Построение асимптотических решений для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малой дисперсией / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Вестник Херсонского национ. техн. ун-та. – 2007. – Т. 2 (28). – С. 323–328.

33. Самойленко, В.Г. Солитоноподобные решения сингулярно возмущенного

уравнения Кортевега–де Фриза / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Proceed. V Intern. Scient. Conf. – Aktobe, October 9 – 10, 2009. – P. 232–234.

34. Грушин, В.В. Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии / В.В. Грушин // Матем. сборник. – 1971. – Вып. 84 (126), № 2. – С. 163–195.

35. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М. : Мир. – 1977. – 540 с.

36. Иванов, В.К. Ассоциативная алгебра простейших обобщенных функций / В.К. Иванов // Сиб. матем. журн. – 1979. – Т. 20, № 4. – С. 731–740.

37. Дубинский, Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения / Ю.А. Дубинский // Итоги науки и техники : ВИНИТИ. Современные проблемы математики. – 1976. – № 9. – С. 5–130.

38. Самойленко, Ю.И. Условия существования разрывных решений квазилинейного уравнения с переменными коэффициентами / Ю.И. Самойленко // Вестник Киевского нац. ун-та имени Тараса Шевченко. Математика. Механика. – 2009. – Вып. 22. – С. 30–36.

39. Самойленко, Ю.И. Асимптотические разложения для однофазовых солитоноподобных решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малой дисперсией / Ю.И. Самойленко // Науч. вестник Черновецкого ун-та : Сборник научных работ. Математика. – Черновцы. – 2007. – Вып. 336–337. – С. 170–177.

40. Самойленко, В.Г. Асимптотические решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 1. – С. 122–132.

41. Samoilenko, V.Hr. Asymptotical expansions of solution to Cauchy problem for Korteweg–de Vries equation with varying coefficients and small parameter / V.Hr. Samoilenko, Yul. Samoilenko // CERMCS International conference of young scientists. Communications. – Chisinau : Moldova State University, 2006. – P. 186–192.

42. Самойленко, Ю.И. Асимптотические решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром четной степени при старшей производной / Ю.И. Самойленко // Науч. вестник Черновецкого ун-та : Сборник научных работ. Математика. – Черновцы. – 2009.– Вып. 485. – С. 102–107.

43. Самойленко, В.Г. Асимптотические двуфазовые солитоноподобные решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами / В.Г. Самойленко, Ю.И. Самойленко // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 3. – С. 378–387.

44. Samoilenko, V.Hr. Asymptotic two phase soliton type solutions to singularly perturbed Korteweg–de Vries equation / V.Hr. Samoilenko, Yul. Samoilenko // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Evolution, control and stability of dynamical systems. – Siedlce : Wydawnictwo WSFiZ, 2009. – P.156–164.

45. Фаминский, А.В. Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений / А.В. Фаминский // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1988. – Вып.13. – С. 56–105.

***V. Samoilenko, Yu. Samoilenko.* To the Metod of the Boundary Layer and the Hugoniot-tupe Condition for the Kortveg de Vries Equation**

The paper deals with asymptotic one phase soliton type solutions to singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. Using the asymptotic series Hughoniout type condition is found and asymptotic solution of Cauchy problem for singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients is constructed through boundary layer method.