УДК 517.927.21, 517.518.82

С.А. Марзан

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

Посвящается памяти моего Учителя
профессора А.А. Килбаса

Исследуется задача Коши для линейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка в весовом пространстве непрерывно дифференцируемых функций на конечном отрезке действительной оси. Получены условия существования единственного решения рассматриваемой задачи. Построены явные решения задач Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приведены соответствующие утверждения для задач Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с производными Капуто комплексных порядков.

Пусть $I^{\alpha}_{a+}g$ и $D^{\alpha}_{a+}y$ – дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси:

$$(I^{\alpha}_{a+}g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \tag{1}$$

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, \tag{2}$$

($[Re(\alpha)]$ – целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4]. Обозначим через ${}^cD^{\alpha}_{a+}y$ модифицированную дробную производную, определяемую формулой

$$\left({}^cD^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right]\right)(x) \ (\alpha \in C, Re(\alpha) > 0), \tag{3}$$

$n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin N = \{1,2,...\}$, $n = \alpha$ при $\alpha \in N$.

Если $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \le n$ $(n \in N)$ и $y(x) \in C^n[a,b]$ – функция, n раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$, то при $\alpha \in N$ производная ${}^cD^{\alpha}_{a+}y$ совпадает с обычной производной:

$$\left({}^cD^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \left(D^n y\right)(x) \quad \left(n \in N; D = \frac{d}{dx}\right),$$

а при $n-1 < \alpha < n$ оператор ${}^cD^{\alpha}_{a+}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования $I^{n-\alpha}_{a+}$ и оператора дифференцирования D^n:

$$\left({}^{c}D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\left(I_{a+}^{n-\alpha}D^{n}y\right)(x)\left(n-1<\alpha<n,\, n\in N;\, D=\frac{d}{dx}\right). \tag{4}$$

Конструкция (4) введена итальянским механиком Капуто [2] в связи с решением задач вискоэластичности ([2; 3]), и поэтому выражения (3) и (4) называют дробными производными Капуто порядка $\alpha \in C$.

Краевые задачи для так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция входит под знаком дробной производной, изучались многими авторами [1, §§ 42–43; 4]. Интерес к таким проблемам вызван их приложениями в задачах физики, механики и других прикладных наук [5; 6].

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса существования и единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения

$$\left({}^{c}D_{a+}^{m+i\theta}y\right)(x)=\lambda y(x)+h(x)\ \ (\lambda\in C) \tag{5}$$

с производной Капуто комплексного порядка $m+i\theta\ \ (m\in N, \theta\neq 0)$

$$\left({}^{c}D_{a+}^{m+i\theta}y\right)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1}\left(I_{a+}^{1-i\theta}\left[y(t)-\sum_{j=0}^{m}\frac{(t-a)^{j}}{j!}y^{(j)}(a)\right]\right)(x), \tag{6}$$

и начальными условиями

$$y^{(j)}(a)=b_j,\ b_j\in C\ \ (j=0,1,\ldots,m). \tag{7}$$

При $a=0$ задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha>0$

$$\left({}^{c}D_{0+}^{\alpha}y\right)(x)=\lambda y(x),\ (n-1<\alpha\leq n, n\in N),\ y^{(k)}(0)=b_k\in C, \tag{8}$$

где $k=0,1,\ldots,n-1$, на $[0,T]\ \ (0<T\leq\infty)$, рассматривалась в [7], где операционный метод был применен для получения явного решения задачи (8)

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n-1}b_j x^j E_{\alpha,j+1}(\lambda x^{\alpha})$$

в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\ \ (z\in C;\alpha,\beta\in C;\mathrm{Re}(\alpha)>0). \tag{9}$$

Этот результат перенесен в [8] на абстрактную задачу Коши вида (8), в которой $\lambda y(x)$ заменено на $Ay(x)$, где A – неограниченный замкнутый оператор в банаховом пространстве.

В работе [9] показано, что задачи Коши для дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто (3) комплексного порядка $\alpha\in C$ с $n-1<\mathrm{Re}(\alpha)<n$ и положительного порядка $n-1<\alpha<n$ ($n\in N$) имеют одинаковые постановки. Ситуация изменяется для дифференциального уравнения с производной Капуто (6) комплексного порядка $m+i\theta\ \ (m\in N,\theta\neq 0)$.

Обозначим через $C_\gamma[a,b]$ $(\gamma\in C)$ класс функций $g(x)$, заданных на $[a,b]$ и таких, что $(x-a)^\gamma g(x)\in C[a,b]$:

$$C_\gamma[a,b]=\left\{g(x):\|g\|_{C_\gamma}=\left\|(x-a)^\gamma g(x)\right\|_C<\infty\right\},\ C_0[a,b]=C[a,b].$$

Из [9, теорема 1] следует, что если $m+i\theta$ $(m\in N,\theta\neq 0)$ $\gamma\in C$ $(0\le \operatorname{Re}(\gamma)<1)$, $\lambda\in C$, $h(x)\in C_\gamma[a,b]$, то для того, чтобы функция $y(x)\in C^m[a,b]$ являлась решением задачи Коши (5), (7), необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения

$$y(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j+\frac{\lambda}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^x\frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}+\left(I_{a+}^{m+i\theta}h\right)(x). \tag{10}$$

Используем для решения уравнения (10) метод последовательных приближений. Пусть

$$y_0(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j,$$

$$y_\nu(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j+I_{a+}^{m+i\theta}\left[\lambda y_{\nu-1}(t)+h(t)\right](x),\ \nu=1,2,\ldots$$

С использованием (1) непосредственно проверяется, что для $\alpha\in C$ $(\operatorname{Re}(\alpha)>0)$, $\beta\in C$ $(\operatorname{Re}(\beta)>0)$

$$\left(I_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

Используя это равенство, находим при $\nu=1,2,\ldots$:

$$y_1(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j+\lambda\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(j+1)}\left(I_{a+}^{m+i\theta}(x-a)^j\right)(x)+\left(I_{a+}^{m+i\theta}h\right)(x)=$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j+\lambda\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta+j+1)}(x-a)^{m+i\theta+j}+\left(I_{a+}^{m+i\theta}h\right)(x),$$

$$y_2(x)=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j+I_{a+}^{m+i\theta}\left[\lambda y_1(x)+h(x)\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j+\lambda\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(m+i\theta+j+1)}(x-a)^{m+i\theta+j}+$$

$$+\lambda^2\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{\Gamma(2(m+i\theta)+j+1)}(x-a)^{2(m+i\theta)+j}+\left(I_{a+}^{m+i\theta}h\right)(x)+\lambda\left(I_{a+}^{2(m+i\theta)}h\right)(x)=$$

$$=\sum_{j=0}^{m} b_j \sum_{k=0}^{2} \frac{\lambda^k (x-a)^{k(m+i\theta)+j}}{\Gamma(k(m+i\theta)+j+1)} + \sum_{k=0}^{1} \lambda^k I_{a+}^{k(m+i\theta)+m+i\theta} h,$$

что в общем случае приводит к формуле

$$y_v(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j \sum_{k=0}^{v} \frac{\lambda^k (x-a)^{k(m+i\theta)+j}}{\Gamma(k(m+i\theta)+j+1)} + \sum_{k=0}^{v-1} \lambda^k I_{a+}^{k(m+i\theta)+m+i\theta} h,\ \ v=1,2,\ldots$$

Переходя к пределу при $m\to+\infty$, получаем следующее представление искомого решения:

$$y(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j (x-a)^j E_{m+i\theta,j+1}\left[\lambda (x-a)^{m+i\theta}\right] + \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} E_{m+i\theta,m+i\theta}\left[\lambda (x-t)^{m+i\theta}\right] h(t)dt\ , \quad (11)$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг-Леффлера (9).

Формула (11) дает единственное решение интегрального уравнения (10), так как соответствующее (10) однородное уравнение

$$y(x)=\frac{\lambda}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-m-i\theta}}$$

имеет только тривиальное решение $y(x)\equiv 0$ [1, § 2.4]. Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 1. Пусть $\gamma\in C$ $(0\le \mathrm{Re}(\gamma)<1)$, $\lambda\in C$, $h(x)\in C_\gamma[a,b]$. Задача Коши (5), (7) имеет в $C_\gamma^{m+i\theta}[a,b]=\left\{y(x)\in C^m[a,b]:\ {}^cD_{a+}^{m+i\theta} y\in C_\gamma[a,b]\right\}$ $(m\in N,\ \theta\ne 0)$ единственное решение, определяемое формулой

$$y(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j (x-a)^j E_{m+i\theta,j+1}\left[\lambda (x-a)^{m+i\theta}\right] + \int_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} E_{m+i\theta,m+i\theta}\left[\lambda (x-t)^{m+i\theta}\right] h(t)dt\ .$$

В частности, единственное решение задачи

$$\left({}^cD_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x)=\lambda y(x),\ y^{(k)}(a)=b_k\in C\ (k=0,1,\ldots,m)$$

определяется формулой

$$y(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j (x-a)^j E_{m+i\theta,j+1}\left[\lambda (x-a)^{m+i\theta}\right].$$

Следствие 1. При $\theta\ne 0$, $\lambda\in C$, $\gamma\in C$ $(0\le \mathrm{Re}(\gamma)<1)$ и $h(x)\in C[a,b]$ задача Коши

$$\left({}^cD_{a+}^{1+i\theta} y\right)(x)=\lambda y(x)+h(x),\ y(a)=b_1\in C,\ y'(a)=b_2\in C$$

имеет в $C_\gamma^{1+i\theta}[a,b]$ единственное решение

$$y(x)=b_1E_{1+i\theta,1}\left[\lambda(x-a)^{1+i\theta}\right]+b_2E_{1+i\theta,2}\left[\lambda(x-a)^{1+i\theta}\right]+\int_a^x(x-t)^{i\theta}E_{1+i\theta,1+i\theta}\left[\lambda(x-t)^{1+i\theta}\right]h(t)dt\,.$$

В частности, решение задачи

$$\left({}^cD_{a+}^{1+i\theta}y\right)(x)=\lambda y(x),\ y(a)=b_1\in C,\ y'(a)=b_2\in C$$

имеет вид

$$y(x)=b_1E_{1+i\theta,1}\left[\lambda(x-a)^{1+i\theta}\right]+b_2E_{1+i\theta,2}\left[\lambda(x-a)^{1+i\theta}\right].$$

Проводя аналогичные рассуждения, полученные результаты легко распространить на случай задач Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с производными Капуто комплексных порядков.

Теорема 2. Пусть $l_s\in N$, $\theta_s\neq 0$, $\gamma_s\in C$ $(0\le \mathrm{Re}(\gamma_s)<1)$, $\lambda_s\in C$ и $h_s(x)\in C_{\gamma_s}[a,b]$ $(s=1,...,m)$. Задача Коши

$$\left({}^cD_{a+}^{l_s+i\theta_s}y_s\right)(x)=\sum_{s=1}^{m}\lambda_s y_s(x)+h_s(x)\,,\ y_s^{(k_s)}(a)=b_{k_s}\in C\ \ (k_s=0,1,\ldots,l_s;\,s=1,...,m)$$

имеет в $\overline{C_{\bar\gamma}^{l+i\theta}}[a,b]=C_{\gamma_1}^{l_1+i\theta_1,l_1}[a,b]\times\ldots\times C_{\gamma_m}^{l_m+i\theta_m,l_m}[a,b]$ единственное решение, определяемое формулой

$$y_s(x)=\sum_{j_s=0}^{l_s}b_{j_s}(x-a)^{j_s}E_{l_s+i\theta,j_s+1}\left[\lambda_s(x-a)^{l_s+i\theta_s}\right]+\int_a^x(x-t)^{l_s+i\theta_s-1}E_{l_s+i\theta_s,l_s+i\theta_s}\left[\lambda_s(x-t)^{l_s+i\theta_s}\right]h_s(t)dt\,.$$

В частности, единственное решение задачи

$$\left({}^cD_{a+}^{l_s+i\theta_s}y_s\right)(x)=\sum_{s=1}^{m}\lambda_s y_s(x)\,,\ y_s^{(k_s)}(a)=b_{k_s}\in C\ \ (k_s=0,1,\ldots,l_s;\,s=1,...,m)$$

определяется формулой

$$y_s(x)=\sum_{j_s=0}^{l_s}b_{j_s}(x-a)^{j_s}E_{l_s+i\theta,j_s+1}\left[\lambda_s(x-a)^{l_s+i\theta_s}\right].$$

Следствие 2. При $\theta_s\neq 0$, $\lambda_s\in C$, $\gamma_s\in C$ $(0\le\mathrm{Re}(\gamma_s)<1)$ и $h_s(x)\in C[a,b]$ задача Коши

$$\left({}^cD_{a+}^{1+i\theta_s}y_s\right)(x)=\sum_{s=1}^{m}\lambda_s y_s(x)+h_s(x),\ y_s(a)=b_{1s}\in C,\ y_s'(a)=b_{2s}\in C\ \ (s=1,...,m)$$

имеет в $\overline{C_{\bar\gamma}^{1+i\theta}}[a,b]$ единственное решение

$$y_s(x)=b_{1s}E_{1+i\theta_s,1}\left[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}\right]+b_{2s}E_{1+i\theta_s,2}\left[\lambda_s(x-a)^{1+i\theta_s}\right]+$$

$$+\int_a^x (x-t)^{i\theta_s} E_{1+i\theta_s,1+i\theta_s}\left[\lambda_s (x-t)^{1+i\theta_s}\right] h_s(t)dt\,.$$

В частности, решение задачи

$$\left({}^c D_{a+}^{1+i\theta_s} y_s\right)(x) = \lambda_s y_s(x),\ y_s(a) = b_{1s} \in C,\ y_s'(a) = b_{2s} \in C \ \ (s = 1,...,m)$$

имеет вид

$$y_s(x) = b_{1s} E_{1+i\theta_s,1}\left[\lambda_s (x-a)^{1+i\theta_s}\right] + b_{2s} E_{1+i\theta_s,2}\left[\lambda_s (x-a)^{1+i\theta_s}\right].$$

Непосредственно проверяется, что функции

$$y_j(x) = (x-a)^j E_{m+i\theta,j+1}\left[\lambda (x-a)^{m+i\theta}\right] \ (j = 0,1,...,m)$$

являются линейно независимыми решениями однородного дифференциального уравнения комплексного порядка

$$\left({}^c D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) = \lambda y(x) \ \ (m \in N, \theta \neq 0)$$

с производной Капуто (6).

Этот факт показывает существенное различие между дифференциальными уравнениями натурального и комплексного порядков. Именно, однородное линейное дифференциальное уравнение порядка $m \in N$ с постоянными коэффициентами имеет m линейно независимых решений, в то время как линейное однородное дифференциальное уравнение комплексного порядка $m + i\theta$ $(m \in N, \theta \neq 0)$ с постоянными коэффициентами может иметь $(m+1)$ линейно независимое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost freguancy independent / M. Caputo // Geophis. J. R. Astr. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.

3. Caputo, M. Linear models of dissipation in an elastic solids / M. Caputo, F. Mcinardi // Riv. Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – P. 161–196.

4. Kilbas, A.A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A.A. Kilbas, J.J. Trujillo // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 153–192.

5. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. Fractals and Fractional calculus in continuum mechanics / R. Gorenflo, F. Mainardi // Viena : Springer. – 1997. – P. 223–276.

6. Oldham, K.B. The fractional calculus / K.B. Oldham, J. Spanier. – London : Acad. Press, 1974. – 234 p.

7. Luchko, Yu.F. An operational method for solving fractional differential equation with the Caputo derivative / Yu.F. Luchko, R. Gorenflo // Acta Math. Vietnam. – 1999. – Vol. 24, № 2. – P. 207–233.

8. Gorenflo, R. On solvability linear fractional differential equations in Banach spaces / R. Gorenflo, Yu.F. Luchko, P.P. Zabreiko // Fract. Calc. Appl. Anal. – 1999. – Vol. 2, № 2. – P. 163–174.

9. Килбас, А.А. Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций / А.А. Килбас, С.А. Марзан // Доклады академии наук. – 2004. – Т. 399, № 1. – С. 7–11.

S.A. Marzan. **Existence and Uniqueness of Solutions of the Cauchy Problem for Linear Differential Equations with the Caputo Derivative of Complex Order**

The Cauchy problem for linear differential equations with the Caputo derivative of complex order axis in the weighted space of continuously differentiable functions on a finite interval of the real. The conditions of existence of a unique solution to the problem. Explicit solutions of Cauchy problems for linear differential equations with constant coefficients. The corresponding assertions for the Cauchy problems for a system of linear differential equations with the Caputo derivatives of complex orders.