УДК 539.12:530.145

П.П. Андрусевич, В.И. Стражев

О ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИИ ДИРАКОВСКИХ ПОЛЕЙ (Ч. 2)

Продолжено начатое в предыдущих работах авторов на данную тему исследование симметрийных свойств лагранжевой формулировки дираковских полей. В рамках вещественного описания рассмотрена система из двух уравнений Дирака одного типа с лагранжианом $L = L_1 - L_2$ и система из двух уравнений Дирака разных типов. Проведен сравнительный анализ внутренних симметрий указанных систем в классическом и квантовом случаях.

Введение

В работе [1] с использованием подхода, предложенного в [2; 3], исследована внутренняя (нелоренцевская) симметрия 8-компонентного комплексного массивного поля, описываемого системой из двух уравнений Дирака

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0, \quad (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0 \tag{1}$$

при выборе лагранжиана в виде

$$L = -\bar{\psi}_1(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 - \bar{\psi}_2(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2. \tag{2}$$

Было установлено, что искомая симметрия в классическом случае описывается группой SO(3,2), которая содержит обычно сопоставляемую такому полю группу SO(3) (или SU(2)) в качестве подгруппы. Продолжим исследование, начатое в [1].

Симметрия 8-компонентного дираковского поля с лагранжианом $L = L_1 - L_2$

Рассмотрим систему (1) с лагранжианом

$$L = -\bar{\psi}_1(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 + \bar{\psi}_2(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2. \tag{3}$$

Опять приведем систему (1) к 16-компонентной вещественной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0, \tag{4}$$

где

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) \text{ – столбец}, \tag{5}$$

(ψ_1^r, ψ_2^r – вещественные, ψ_1^i, ψ_2^i – чисто мнимые компоненты) и

$$\Gamma_1 = \gamma_4 \otimes \gamma_1,\ \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = \gamma_4 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = \gamma_4 \otimes \gamma_4. \tag{6}$$

Матрица билинейной лоренц-инвариантной формы η имеет в данном случае вид:

$$\eta = I_2 \otimes (\sigma_3 \otimes \gamma_4) = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_4. \tag{7}$$

Преобразования внутренней симметрии рассматриваемого поля могут быть параметризованы посредством эрмитовских генераторов, которые содержатся в наборе

$$\Gamma'_\mu,\ \Gamma'_5 = \Gamma'_1\Gamma'_2\Gamma'_3\Gamma'_4,\ i\Gamma'_\mu\Gamma_5,\ \frac{i}{2}\Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]} = \frac{i}{2}(\Gamma'_\mu\Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu\Gamma'_\mu), \tag{8}$$

где Γ'_μ – квадратные матрицы 16×16, удовлетворяющие алгебре матриц Дирака и взаимно коммутирующие с Γ_μ. В базисе (5) матрицы Γ'_μ имеют вид [1]:

$$\Gamma'_1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ \ \Gamma'_2 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ \Gamma'_3 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ \Gamma'_4 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2. \tag{9}$$

Накладывая сначала на бесконечно малые преобразования внутренней симметрии

$$Q = 1 + \omega_A J^A \tag{10}$$

с генераторами (8), (9) условие сохранения структуры (5) волновой функции (условие вещественности поля), найдем ограничения на параметры ω_A. Применяя затем условие

$$(\omega_A J^A)^+ \eta = -\eta \omega_A J^A \tag{11}$$

инвариантности лагранжиана, получим, что «хорошими» в данном случае являются генераторы

$$\Gamma'_2,\ \Gamma'_3,\ \Gamma'_4,\ \Gamma'_5,\ i\Gamma'_2\Gamma'_5,\ i\Gamma'_3\Gamma'_5,\ i\Gamma'_4\Gamma'_5,\ i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]},\ i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]},\ i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}, \tag{12}$$

которым соответствуют 6 вещественных ($\omega_3,\ \omega_4,\ \omega_{35},\ \omega_{45},\ \omega_{[23]},\ \omega_{[24]}$) и 4 мнимых ($\omega_2,\ \omega_5,\ \omega_{25},\ \omega_{[34]}$) параметра.

Таким образом, как и в случае теории с лагранжианом (2), приходим к группе SO(3,2), но с иным набором генераторов [1]. Группа SO(2,1), ответственная за перемешивание однотипных по знаку энергии и проекции спина состояний, содержится в ней в качестве подгруппы и задается генераторами

$$i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]},\ i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]},\ i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}. \tag{13}$$

Симметрия двух дираковских полей разных типов

Теперь рассмотрим систему, состоящую из двух различных типов уравнений Дирака

$$\begin{aligned} &(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0, \\ &(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi_2 = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

лагранжиан которой выберем в виде

$$L = -\bar\psi_1(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 + \bar\psi_2(\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi_2. \tag{15}$$

Для удобства исследования перепишем (14) следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_1 = 0, \\ &(-\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_2 = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Беря от (16) комплексное сопряжение, затем складывая и вычитая соответствующие уравнения исходной и комплексно сопряженной систем, получим 16-компонентную систему уравнений, которая может быть записана в форме (4), (5) с матрицами:

$$\Gamma_1 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_1,\ \ \Gamma_2 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_2,\ \Gamma_3 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_3,\ \Gamma_4 = -i\gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_4. \tag{17}$$

Матрица билинейной формы η в данном случае имеет вид:

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_4. \tag{18}$$

Переход в фермионный базис осуществляется здесь с помощью преобразования:

$$\begin{aligned} &C = AB, \\ &A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \\ &A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) - \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)], \\ &B = B^+ = B^{-1} = \frac{1}{2}[(I_4 - i\gamma_1\gamma_2) \otimes I_4 + (I_4 + i\gamma_1\gamma_2) \otimes \gamma_5]. \end{aligned} \tag{19}$$

Генераторы (8) унитарной группы преобразований внутренней симметрии, удовлетворяющих условию $[Q, \Gamma_\mu]_- = 0$, переводятся в базис (5) посредством матрицы

$C^{-1} = BA^{-1}$ и имеют в этом базисе вид:

$$\begin{aligned}
&\Gamma'_1 = -\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ \Gamma'_2 = \gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ \Gamma'_3 = -\gamma_4 \otimes \gamma_2,\\
&\Gamma'_4 = \gamma_3 \otimes \gamma_2,\ \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4,\ \Gamma'_1\Gamma'_5 = -i\gamma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5,\\
&\Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_5,\ \Gamma'_3\Gamma'_5 = -i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2,\ \Gamma'_4\Gamma'_5 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2,\\
&\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = i\gamma_2\gamma_3 \otimes \gamma_5,\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{1]} = i\gamma_3\gamma_1 \otimes \gamma_5,\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{2]} = i\gamma_1\gamma_2 \otimes I_4,\\
&\Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} = i\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_5,\ \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = i\gamma_2\gamma_4 \otimes \gamma_5,\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = i\gamma_3\gamma_4 \otimes I_4.
\end{aligned} \tag{20}$$

Условие вещественности поля приводит к вещественности параметров $\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_{15}, \omega_{35}, \omega_{45}, \omega_{[23]}, \omega_{[12]}, \omega_{[24]}$ и мнимости параметров $\omega_2, \omega_5, \omega_{25}, \omega_{[31]}$, $\omega_{[14]}, \omega_{[34]}$. С учетом данного обстоятельства нетрудно убедится, что условию (11) удовлетворяют генераторы (12), которым по-прежнему соответствуют шесть вещественных и четыре мнимых параметра.

Таким образом, группа внутренней симметрии системы двух уравнений Дирака разных типов с лагранжианом (15) совпадает с группой внутренней симметрии системы (1) с лагранжианом (3).

Квантовый случай

Выясним, сохраняется ли установленная выше SO(3,2)-симметрия системы (1) на квантовом уровне. Рассмотрим сначала систему (1) с лагранжианом (3). Переведем генераторы (12) из базиса (5) в базис

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) \text{ – столбец,} \tag{21}$$

где $\bar{\psi}_i = \psi_i^+ \gamma_4 (i = 1, 2)$. В результате получим выражения:

$$\begin{aligned}
&\Gamma'_2 = -i\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \Gamma'_3 = -i\gamma_5\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4,\\
&\Gamma'_4 = \gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \Gamma'_5 = -i\gamma_4 \otimes I_4,\\
&i\Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ i\Gamma'_3\Gamma'_5 = i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4,\\
&i\Gamma'_4\Gamma'_5 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = i\gamma_1\gamma_5 \otimes I_4,\\
&i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes I_4,\ i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = i\gamma_3\gamma_5 \otimes I_4.
\end{aligned} \tag{22}$$

Затем разложим ψ_i и $\bar{\psi}_i$ по «чистым» состояниям, представляющим решения уравнений (1) с положительными и отрицательными частотами и проекциями спина $s = 1/2, -1/2$:

$$\begin{aligned}
\psi_i &= \sum_s a_{is}\psi_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is}^+ \psi_{is}^{(-)},\\
\bar{\psi}_i &= \sum_s a_{is}^+ \bar{\psi}_{is}^{(+)} + \sum_s b_{is} \bar{\psi}_{is}^{(-)}.
\end{aligned} \tag{23}$$

При квантовании коэффициенты разложения a_{is}^+, b_{is}^+, a_{is}, b_{is} принимают смысл операторов рождения и уничтожения, для которых постулируются антикоммутационные соотношения (статистика Ферми–Дирака)

$$\begin{aligned}
&[a_{1s}(p), a_{1s'}^{(+)}(p')]_+ = [b_{1s}(p), b_{1s'}^{(+)}(p')]_+ = \delta_{ss'}\delta(p - p'),\\
&[a_{2s}(p), a_{2s'}^{(+)}(p')]_+ = [b_{2s}(p), b_{2s'}^{(+)}(p')]_+ = -\delta_{ss'}\delta(p - p'),
\end{aligned} \tag{24}$$

и все остальные антикоммутанты равны нулю.

Для проверки инвариантности соотношений (24) относительно однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (22), надо установить соответствующие трансформационные свойства операторов рождения и уничтожения. В базисе (21) операторы знака энергии $\widehat{\Gamma}_4$, проекции спина $\widehat{S}_3 = -\frac{i}{4}\Gamma_{[1}\Gamma_{2]}$ и внутренней четности $\widehat{\Pi} = I_2 \otimes (\sigma_3 \otimes I_4)$, выступающие в данном случае в качестве операторов полного набора, имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Gamma}_4 = diag(1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1),\\
&\widehat{S}_3 = \frac{1}{2} diag(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1),\\
&\widehat{\Pi} = diag(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1).
\end{aligned} \tag{25}$$

Располагая теперь операторы рождения и уничтожения в столбец в последовательности, определяемой выражениями (25), и применяя к нему (столбцу) преобразования $I^0 + \Omega_A I^A$, находим соответствующие трансформационные свойства этих операторов. В итоге для генераторов (22) получим:

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - 2si\omega b_{2,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - 2si\omega a^+_{2,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - 2si\omega b^+_{1,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - 2si\omega a_{1,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + 2si\omega b^+_{2,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + 2si\omega a_{2,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2si\omega b_{1,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2si\omega a^+_{1,s},
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} + 2s\omega b_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} + 2s\omega a^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} + 2s\omega b^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + 2s\omega a_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + 2s\omega b^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + 2s\omega a_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2s\omega b_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2s\omega a^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} + 2si\omega b_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} + 2si\omega a^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - 2si\omega b^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - 2si\omega a_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - 2si\omega b^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - 2si\omega a_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2si\omega b_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2si\omega a^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - \omega a_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - \omega b^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - \omega a^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - \omega b_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + \omega a^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + \omega b_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + \omega a_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + \omega b^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} + 2s\omega b_{2,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} + 2s\omega a^+_{2,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} + 2s\omega b^+_{1,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + 2s\omega a_{1,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + 2s\omega b^+_{2,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + 2s\omega a_{2,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2s\omega b_{1,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2s\omega a^+_{1,s},
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - 2si\omega b_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - 2si\omega a^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - 2si\omega b^+_{2,s}, b'_{2,s} = b_{2,s} - 2si\omega a_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + 2si\omega b^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + 2si\omega a_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2si\omega b_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2si\omega a^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - 2s\omega b_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - 2s\omega a^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} + 2s\omega b^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + 2s\omega a_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - 2s\omega b^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - 2s\omega a_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2s\omega b_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2s\omega a^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - \omega a_{2,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - \omega b^+_{2,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - \omega a^+_{1,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - \omega b_{1,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + \omega a^+_{2,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + \omega b_{2,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + \omega a_{1,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + \omega b^+_{1,s},
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} + i\omega a_{2,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} + i\omega b^+_{2,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - i\omega a^+_{1,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - i\omega b_{1,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + i\omega a^+_{2,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + i\omega b_{2,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} - i\omega a_{1,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} - i\omega b^+_{1,s},
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - \omega a_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - \omega b^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} + \omega a^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + \omega b_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + \omega a^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + \omega b_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} - \omega a_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} - \omega b^+_{2,s}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Проверка показывает, что инвариантность условий квантования (24) имеет место для четырех генераторов Γ'_2, $i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$, $i\Gamma'_2\Gamma'_5$ и Γ'_5 (преобразования (26), (29), (30), (35)), которым соответствуют мнимые параметры $\omega_2, \omega_5, \omega_{25}, \omega_{[34]}$. Первые три генератора определяют внутреннюю симметрию квантовой (статистика Ферми–Дирака) теории 8-компонентного дираковского поля с лагранжианом (3). Генератор Γ'_5 соответствуют фазовому преобразованию $\psi_1 \to \psi_1 e^{i\varphi}$, $\psi_2 \to \psi_2 e^{-i\varphi}$.

Кроме того, для рассматриваемого поля возможно физически непротиворечивое квантование по статистике Бозе–Эйнштейна, которое осуществляется с помощью коммутационных соотношений

$$\begin{aligned}
&[a_{1s}(p), a^{(+)}_{1s'}(p')]_- = [b_{2s}(p), b^{(+)}_{2s'}(p')]_- = \delta_{ss'}\delta(p-p'),\\
&[a_{2s}(p), a^{(+)}_{2s'}(p')]_- = [b_{1s}(p), b^{(+)}_{1s'}(p')]_- = -\delta_{ss'}\delta(p-p').
\end{aligned} \tag{36}$$

Как показывает непосредственная проверка, перестановочные соотношения (36) инвариантны относительно преобразований, задаваемых генераторами

$$\Gamma'_3,\ \Gamma'_4,\ \Gamma'_5,\ \ i\Gamma'_3\Gamma'_5,\ \ i\Gamma'_4\Gamma'_5,\ i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}, \qquad (37)$$

которым соответствуют 4 вещественных ($\omega_3, \omega_4, \omega_{35}, \omega_{45}$) и 2 мнимых ($\omega_5, \omega_{[34]}$) параметра. Следовательно, внутренняя симметрия квантовой формулировки исследуемого дираковского поля при его квантовании по статистике Бозе–Эйнштейна описывается группой, изоморфной группе SO(2,2).

Рассмотрим теперь систему (14) с лагранжианом (15). Генераторы (12) для системы (14) в базисе (21) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\Gamma'_2 = -\gamma_1\gamma_4 \otimes \gamma_1\gamma_3,\ \ \Gamma'_3 = \gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4,\\
&\Gamma'_4 = \gamma_3\gamma_4 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \ \Gamma'_5 = -\gamma_4 \otimes I_4,\\
&i\Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_1\gamma_3,\ \ i\Gamma'_3\Gamma'_5 = i\gamma_5 \otimes \gamma_2\gamma_4,\\
&i\Gamma'_4\Gamma'_5 = -i\gamma_3 \otimes \gamma_2\gamma_4,\ \ i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_5,\\
&i\Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = -i\gamma_1\gamma_3 \otimes \gamma_5,\ \ i\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = i\gamma_3\gamma_5 \otimes I_4.
\end{aligned} \qquad (38)$$

Квантовая формулировка дираковского поля, описываемого системой (14), базируется на антикоммутационных соотношениях

$$\begin{aligned}
&[a_{1s}(p), a^{(+)}_{1s'}(p')]_+ = [b_{1s}(p), b^{(+)}_{1s'}(p')]_+ = \delta_{ss'}\delta(p-p'),\\
&[a_{2s}(p), a^{(+)}_{2s'}(p')]_+ = [b_{2s}(p), b^{(+)}_{2s'}(p')]_+ = -\delta_{ss'}\delta(p-p').
\end{aligned} \qquad (39)$$

Операторы знака энергии $\widehat{\Gamma}_4$, проекции спина $\widehat{S}_3$ и внутренней четности $\widehat{\Pi}$ в данном случае принимают вид:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Gamma}_4 = diag(1,1,-1,-1,-1,-1,1,1-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,),\\
&\widehat{S}_3 = \frac{1}{2}diag(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1),\\
&\widehat{\Pi} = diag(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1).
\end{aligned} \qquad (40)$$

Поступая далее аналогично п. 3, получим следующие формулы преобразования для операторов рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} + 2si\omega a_{2,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} + 2si\omega b^+_{2,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} + 2si\omega a^+_{1,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + 2si\omega b_{1,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - 2si\omega a^+_{2,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - 2si\omega b_{2,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} - 2si\omega a_{1,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} - 2si\omega b^+_{1,s},
\end{aligned} \qquad (41)$$

$$\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - 2s\omega b_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - 2s\omega a^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - 2s\omega b^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - 2s\omega a_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - 2s\omega b^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - 2s\omega a_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} - 2s\omega b_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} - 2s\omega a^+_{2,s},
\end{aligned} \qquad (42)$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} + 2si\omega b_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} + 2si\omega a^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - 2si\omega b^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - 2si\omega a_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - 2si\omega b^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - 2si\omega a_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2si\omega b_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2si\omega a^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - \omega a_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - \omega b^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - \omega a^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - \omega b_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + \omega a^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + \omega b_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + \omega a_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + \omega b^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - 2s\omega a_{2,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - 2s\omega b^+_{2,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - 2s\omega a^+_{1,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - 2s\omega b_{1,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - 2s\omega a^+_{2,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - 2s\omega b_{2,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} - 2s\omega a_{1,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} - 2s\omega b^+_{1,s},
\end{aligned} \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - 2si\omega b_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - 2si\omega a^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} - 2si\omega b^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} - 2si\omega a_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} + 2si\omega b^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + 2si\omega a_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2si\omega b_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2si\omega a^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - 2s\omega b_{1,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - 2s\omega a^+_{1,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} + 2s\omega b^+_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + 2s\omega a_{2,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - 2s\omega b^+_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - 2s\omega a_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + 2s\omega b_{2,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + 2s\omega a^+_{2,s},
\end{aligned} \tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} + \omega b_{2,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} + \omega a^+_{2,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} + \omega b^+_{1,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + \omega a_{1,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - \omega b^+_{2,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - \omega a_{2,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} - \omega b_{1,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} - \omega a^+_{1,s},
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - i\omega b_{2,s},\ (b^+_{1,s})' = b^+_{1,s} - i\omega a^+_{2,s},\\
&(a^+_{2,s})' = a^+_{2,s} + i\omega b^+_{1,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + i\omega a_{1,s},\\
&(a^+_{1,s})' = a^+_{1,s} - i\omega b^+_{2,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} - i\omega a_{2,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} + i\omega b_{1,s},\ (b^+_{2,s})' = b^+_{2,s} + i\omega a^+_{1,s},
\end{aligned} \tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
&a'_{1,s} = a_{1,s} - \omega a_{1,s},\ (b^{+}_{1,s})' = b^{+}_{1,s} - \omega b^{+}_{1,s},\\
&(a^{+}_{2,s})' = a^{+}_{2,s} + \omega a^{+}_{2,s},\ b'_{2,s} = b_{2,s} + \omega b_{2,s},\\
&(a^{+}_{1,s})' = a^{+}_{1,s} + \omega a^{+}_{1,s},\ b'_{1,s} = b_{1,s} + \omega b_{1,s},\\
&a'_{2,s} = a_{2,s} - \omega a_{2,s},\ (b^{+}_{2,s})' = b^{+}_{2,s} - \omega b^{+}_{2,s}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Проверяя инвариантность перестановочных соотношений (39) относительно этих преобразований, получим, что условия (30) инвариантны относительно преобразований с генераторами $\Gamma'_2, \Gamma'_5, i\Gamma'_2\Gamma'_5$ перемешивающих состояния частицы и античастицы из различных уравнений Дирака и образующих группу SO(3), а также преобразования $\Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}$, соответствующего в данном случае фазовому преобразованию $\psi_1 \to \psi_1 e^{i\varphi}$, $\psi_2 \to \psi_2 e^{-i\varphi}$.

Заключение

Проведенный в работе анализ показывает, что внутренняя симметрия системы двух одинаковых уравнений Дирака с разностью лагранжианов и системы двух уравнений Дирака разных типов на классическом уровне совпадают и описываются группой SO(3,2). Для квантового поля в первом случае «выживает» группа SO(2,1), во втором – SO(3). В частности, это приводит к возможности рассмотрения внутренней симметрии SO(3) в теории двух полей Дирака разных типов и может оказаться методом описания и исследования новых физических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии дираковских полей (ч.1) / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 5–10

2. Андрусевич, П.П. О внутренней симметрии уравнения Дирака / П.П. Андрусевич, В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009, № 2. – С. 46–51

3. Плетюхов, В.А. Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ, Сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.

4. Стражев, В.И. О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П.Л. Школьников // Известия вузов. Физика. – 1981. – № 11. – С. 115–117.

5. Фущич, В.И. О новых и старых симметриях уравнений Максвелла и Дирака / В.И. Фущич, А.Г. Никитин // ЭЧАЯ. – 1983. – Т. 14. – № 1. – С. 5–57.

6. Нишиджима, К. Фундаментальные частицы / К. Нишиджима. – Москва: Изд-во «Мир», 1965. – 462 с.

***P.P. Andrusevich, V.I. Strazhev.* On Inner Symmetry of Dirac Fields (Part 2)**

The research on symmetric properties of Langrage formula of Dirac fields which was started in the previous papers of the authors is continued. In the framework of material description the system of two Dirac equations of one type with langrange and the system of two Dirac equations of different types are considered. The comparative analysis of inner symmetries in the given systems in classical and quantum cases is carried out.