УДК 513.82

А.А. Юдов, Е.Е. Гурская

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ КАНОНИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ В РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе изучаются канонические связности в редуктивных однородных пространствах G/G_i, где G – группа Ли движений пространства ${}^2R_4$, G_i – подгруппа Ли группы Ли вращений этого пространства. Строятся модели таких пространств и находятся геодезические линии канонической связности. Построенные геодезические линии полностью характеризуют каноническую связность.

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство нулевой сигнатуры – пространство ${}^2R_4$ и группу Ли G движений этого пространства.

Представим пространство ${}^2R_4$ в виде однородного φ-пространства В.И. Ведерникова.

Рассмотрим следующий эндоморфизм φ группы G:

$$\varphi : G \to G : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

При помощи эндоморфизма φ построим φ-пространство X по правилу:

$$X = \left\{ a\varphi\left(a^{-1}\right) \mid a \in G \right\}.$$

В этом множестве X транзитивно действует группа G:

$$(G, X) \to X : \left(g, a\varphi\left(a^{-1}\right)\right) \to g\, a\varphi\left(a^{-1}\right)\varphi\left(g^{-1}\right).$$

Следовательно, X становится однородным пространством со структурной группой G. Непосредственным вычислением получаем, что множество X состоит из элементов вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & \varepsilon \end{pmatrix} \right\}, \text{ где } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа стационарности H элемента $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $O \in X$, совпадает с множеством всех φ-неподвижных элементов группы G, т.е. с множеством:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & A & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \right\}.$$

Имеет место

Теорема 1. *G – пространства ${}^2R_4$ X, G/H изоморфны, причём G-изоморфизм задаётся отображениями*:

$$\delta,\psi:\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\xrightarrow{\delta}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\x_1&1&0&0&0\\x_2&0&1&0&0\\x_3&0&0&1&0\\x_4&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\psi}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\x_1&1&0&0&0\\x_2&0&1&0&0\\x_3&0&0&1&0\\x_4&0&0&0&1\end{pmatrix}H.$$

Рассмотрим для модели φ-пространства X формулы канонической проекции:

$$\pi : G \to X \equiv G/H : a \to aH,$$

$$\pi : G \to G/H \equiv X : \begin{pmatrix}1&0\\t&A\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0\\t&A\end{pmatrix}H = \begin{pmatrix}1&0\\t&E\end{pmatrix}H \equiv \begin{pmatrix}1&0\\t&E\end{pmatrix} \in X$$

и её дифференциал:

$$d\pi_{|e} : \overline{G} \to T_{\pi(e)}(G/H) : \begin{pmatrix}0&0\\\tau&B\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&0\\\tau&0\end{pmatrix}.$$

Сформулируем следующую теорему А.С. Понтрягина:

Теорема 2. [3, с. 156]. *Пусть G – непрерывная транзитивная группа преобразований топологического пространства Г и α – некоторая фиксированная точка пространства Г. Обозначим через $\psi(\xi)$ множество всех элементов $x \in G$, удовлетворяющих условию $x^*(\alpha) = \xi$. Оказывается, что $H_\alpha = \psi(\alpha)$ есть подгруппа топологической группы G, ψ есть взаимно однозначное отображение множества Г на множество G/H_α левых смежных классов. Оказывается, что ψ^{-1} есть непрерывное отображение пространства G/H на пространство Г. Пусть φ – тождественное отображение группы G на себя. Если пространства G и Г локально бикомпактны и пространство G представимо как сумма счётного множества своих бикомпактных подмножеств, то пара φ, ψ есть подобие пары G, Г на пару G, G/H_α.*

Введем следующие определения.

Определение 1. *Образом стационарности подгруппы K группы G называется совокупность D фигур пространства $^2R_4$ и ему соответствующего векторного пространства $^2E_4$ таких, что группе K принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности D инвариантна.*

Определение 2. *Упорядоченная совокупность фигур пространства $^2R_4$ называется флагом, если все фигуры этой совокупности являются k-плоскостями (k = 0, 1, 2, 3, 4) пространства $^2R_4$, причем каждая последующая плоскость содержится в предыдущей.*

Флаг выписывается в порядке убывания размерности элементов.

Все подгруппы Ли группы Ли H, имеющие флаговые образы стационарности, перечислены в работе [2].

Ниже приведены все такие подгруппы Ли группы Ли H, причем подгруппы Ли задаются своими алгебрами Ли:

$\overline{G}_1 = \{i_{10}\}$, о.с. – точечно-неподвижная евклидова плоскость $\overset{\circ}{R}_2$.

$\overline{G}_2 = \{i_5\}$, о.с. – точечно-неподвижная мнимоевклидова плоскость $^2\overset{\circ}{R}_2$.

$\overline{G}_3 = \{i_6\}$, о.с. – точечно-неподвижная псевдоевклидова плоскость $^1\overset{\circ}{R}_2$.

$\overline{G}_4 = \{i_8 - i_{10}\}$, о.с. – точечно-неподвижная полуевклидова плоскость $\overset{\circ}{R}{}^1_2$.

$\overline{G}_5 = \{i_5 - i_7\}$, о.с. – точечно-неподвижная полумнимоевклидова плоскость ${}^1\overset{\circ}{R}{}^1_2$.

$\overline{G}_6 = \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}$, о.с. – точечно-неподвижная изотропная плоскость $\overset{\circ}{R}{}^2_2$.

$\overline{G}_{14} = \{i_5, i_{10}\}$, о.с. – обобщенный флаг $\{R_2, R_0\}$.

$\overline{G}_{15} = \{i_6, i_9\}$, о.с. – флаг $\{{}^1R_2, R_0\}$.

$\overline{G}_{16} = \{i_9, i_8 - i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_2{}^1, R_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{17} = \{i_9, i_5 - i_7\}$, о.с. – флаг $\{{}^1R_2{}^1, {}^1R_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{18} = \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_2{}^1, \overset{\circ}{R}{}^1_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{27} = \{i_8, i_9, i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{28} = \{i_5, i_7, i_9\}$, о.с. – флаг $\{{}^1R_1, R_0\}$.

$\overline{G}_{29} = \{i_6, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$, о.с. – точечно-неподвижная изотропная прямая $\overset{\circ}{R}{}^1_1$.

$\overline{G}_{30} = \{i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_2{}^1, R_0\}$.

$\overline{G}_{36} = \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_1{}^1, R_0\}$.

$\overline{G}_{40} = \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_8 - i_{10}\}$, о.с. – флаг $\{R_2{}^2, R_0\}$.

$H = \{i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$, о.с. – точка R_0.

Будем рассматривать каноническую связность на редуктивном однородном пространстве [1, гл.11]. Следующая теорема обосновывает существование связности, инвариантной под действием левых сдвигов группы Ли G на редуктивном однородном пространстве G/H.

Теорема 3. [1, с. 104]. *Пусть G – связная группа Ли, а H – её замкнутая подгруппа. Пусть $\overline{G}$ и $\overline{H}$ – алгебры Ли для G и H соответственно.*

(1) Если существует подпространство m в $\overline{G}$ такое, что $\overline{G} = \overline{H} + m$ (прямая сумма) и $ad(H)m=m$, то $\overline{H}$-компонента ω канонической 1-формы θ в G по отношению к разложению $\overline{G} = \overline{H} + m$ определяет связность в расслоении G (G/H, H), инвариантную под действием левых сдвигов из G.

(2) Обратно, любая связность в G (G/H, H), инвариантная под действием левых сдвигов из G (если она существует), определяет такое разложение $\overline{G} = \overline{H} + m$ и может быть получена так, как это описано в (1).

Инвариантная связность в главном расслоении $P(M, G)=G$ (G/H, H), заданная теоремой 3, называется канонической связностью.

Согласно теореме Понтрягина, однородное пространство задается как множество точек-образов начальной точки (опорного элемента). В качестве опорного элемента для пространства G/G_i будем брать образ стационарности подгруппы Ли G_i. Имеет место теорема.

Теорема 4. [1, с.180]. *Пусть G/H редуктивное однородное пространство и m – редуктивное дополнение. Для канонической связности этого пространства выполняются следующие условия*:

1) *для каждого $X \in m$ пусть $f_t = exp(t)\ X$ в G и $x_t = f_t(o)$, где o – начальный элемент однородного пространства G/H. Тогда параллельный перенос касательных векторов в o вдоль кривой x_t, $0 \le t \le s$, совпадает с дифференциалом от f_s, действующим на G/H;*
2) *для каждого $X \in m$ кривая $x_t = f_t(o)$ есть геодезическая. Обратно, каждая геодезическая, исходящая из o, имеет вид $f_t(o)$ для некоторого $X \in m$;*
3) *каноническая связность полна.*

Среди однородных редуктивных пространств с двумерными группами стационарности флаговый образ стационарности имеют группы G_{14} и G_{15}: (R_2, R_0) и $({}^1R_2, R_0)$ соответственно. Будем задавать ${}^2R_4$ как φ-пространство. Тогда евклидова плоскость, точка R_0 (начало координат) и псевдоевклидова плоскость будут задаваться соответственно матрицами:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ {}^1R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим редуктивные однородные пространства G/G_{14}, G/G_{15}. Редуктивные дополнения для них имеют соответственно вид: $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_6, i_7, i_8, i_9\}$; $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$.

Однопараметрическая группа Ли, соответствующая оператору i_k $(k=1, 2, 3\ldots10)$, состоит из элементов вида:

$$e^{t i_k} = E + t i_k + \frac{t^2 i_k^{\,2}}{2!} + \frac{t^3 i_k^{\,3}}{3!} + \ldots\ . \tag{1}$$

Приведем пример нахождения геодезических линий на примере оператора i_5.

$$i_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ i_5^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ i_5^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\ i_5^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Исходя из формулы (1) получим:

$$e^{t i_5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^3}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \ldots & t - \frac{t^3}{6} + \ldots & 0 & 0 \\ -t + \frac{t^3}{6} - \ldots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$e^{-t i_5} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ – обратная матрица.

Начальную точку однородного пространства G/G_{15} будем задавать с помощью матрицы вида $\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$, где левый верхний блок задает точку R_0, а правый нижний блок при произвольных λ, μ задает псевдоевклидову плоскость. Элемент группы $e^{t i_5}$ действует одновременно на точку и плоскость и определяет таким образом траекторию флага (геодезическую линию).

Геодезические линии, соответствующие оператору i_5, имеют, таким образом, вид:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\cos t&\sin t&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-\sin t&\cos t&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\cos t&\sin t&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-\sin t&\cos t&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]\times\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\cos t&-\sin t&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\sin t&\cos t&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\cos t&-\sin t&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\sin t&\cos t&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda\cos t&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-\lambda\sin t&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

Аналогично получаем геодезические линии, соответствующие остальным операторам:

$$i_7=i_7^3=\begin{bmatrix} 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{bmatrix};\ i_7^2=i_7^4=\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix};\ e^{t i_7}=\begin{bmatrix} cht&0&0&sht\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ sht&0&0&cht \end{bmatrix};\ e^{-t i_7}=\begin{bmatrix} cht&0&0&-sht\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ -sht&0&0&cht \end{bmatrix}.$$

Геодезические линии, соответствующие операторам i_7, i_8, i_{10}, i_1, i_2, i_3, i_4, имеют вид:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda cht&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda sht&0&0&0&1 \end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu sht&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu cht&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu\cos t&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&-\mu\sin t&0&0&0&1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ t&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ t&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ t&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ t&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$ соответственно.

Начальную точку однородного пространства G/G_{14} будем задавать с помощью матрицы вида

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right].$$

Таким образом, геодезические линии, соответствующие операторам $i_6, i_7, i_8, i_9, i_1, i_2, i_3, i_4$, будут иметь вид:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda cht&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda sht&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda cht&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda sht&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu cht&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu sht&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu cht&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&\mu sht&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ t&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right];\ \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ t&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
t&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right];\quad
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
t&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\mu&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right]$$ соответственно.

Геодезические линии, соответствующие линейным комбинациям базисных векторов из редуктивного дополнения, получаются в соответствии со свойствами отображения exp в результате перемножения матриц, полученных для базисных операторов. Таким образом, получены всевозможные геодезические линии рассматриваемых редуктивных однородных пространств (Теорема 3, усл. 2).

Аналогичные задачи решены для редукивных однородных пространств с одномерной, трехмерной и четырехмерной группами стационарности О.Н. Курочкой, Н.В. Пугач.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Параметр t на вышеопределенных геодезических линиях является каноническим.*

Доказательство.

Параметр t на геодезической $x_i=x_i(t)$, для которого $\frac{dx_i}{dt}$ есть параллельно переносимый касательный вектор, называется каноническим параметром. Согласно теореме Номидзу и Кобаяси (Теорема 3, усл.1), параллельный перенос касательных векторов вдоль кривой $x(t)$ совпадает с дифференциалом от T_s, где T_s – движение в рассматриваемом однородном пространстве, индуцированное левыми сдвигами фундаментальной группы. Имеет место формула $\pi\circ L_s= T_s\circ\pi$ и, соответственно, для дифференциалов: $d\pi\circ dL_s= dT_s\circ d\pi$. Для однопараметрической подгруппы $e^{t i_k}$ вектор i_k является параллельно переносимым при помощи dL_s касательным вектором. Касательный вектор геодезической линии $x_i=x_i(t)=\pi(e^{t i_k})$ также переносится параллельно вдоль геодезической в силу задания движений в однородном пространстве. Теорема 5 доказана.

Имеют место теоремы.

Теорема 6. [4, с. 424]. *Линейная связность без кручения полностью определяется заданием геодезических линий и канонических параметров на них.*

Тензоры кручения Т канонической связности в однородных пространствах G/G_{14}, G/G_{15} равны нулю. Учитывая теорему 6, получаем следующую теорему:

Теорема 7. *Геодезические линии, полученные выше, полностью характеризуют каноническую связность в редуктивных однородных пространствах G/G_{14}, G/G_{15}.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.

2. Курочка, О. Н. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидового пространства $^2R_4$ нулевой сигнатуры, имеющие флаговый образ стационарности / О. Н. Курочка // Вестник БрГУ. – 2002. – № 6. – С. 18–28.

3. Понтрягин, Л.С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1973. – 519 с.
4. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.

A.A. Yudov, H.H. Gurskaya. **The Geodetic Lines of Canonical Connectednesses in Reductive Homogeneous Spaces**

In the article the canonical connectednesses in reductive homogeneous spaces G/G_i. G , where Lie group of motions of space $^2R_4$, G_i – subgroup of Lie rotation group of space $^2R_4$ are studied. The models of such spaces are built and the geodetic lines of the canonical connectedness are found. It is proved that these geodetic lines completely characterize the canonical connectedness.