УДК 519.24

И.И. Комаров, Чэнь Хайлун

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА DPR ДЛЯ ОЦЕНКИ ИНДЕКСА УСТОЙЧИВОСТИ

Анализ взаимосвязей экономических данных, представленных в виде временных рядов, является необходимой составной частью современных исследований. В ряде задач экономики и её приложениях, где необходимо оценивать лишь хвост распределения, основное внимание направленно на оценивание хвостового индекса, который называют индексом устойчивости. В данной статье рассматривается DPR метод. Исследуется возможность его применения для оценки индекса устойчивости на примере смоделированных устойчивых случайных величин.

Класс устойчивых распределений является одним из важнейших в теории вероятностей прежде всего потому, что эти распределения удовлетворяют обобщенной центральной предельной теореме и являются предельным распределением, при условии его существования, нормированных сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин.

Известно [1], что случайная величина ξ будет устойчивой тогда и только тогда, когда логарифм ее характеристической функции $\varphi_\xi(t)$, $t\in R$ представим в виде:

$$\ln\varphi_\xi(t) = i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha + i\sigma^\alpha t\omega(t,\alpha,\beta), \tag{1}$$

$$\omega(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} |t|^{\alpha-1}\beta\,\mathrm{tg}(\pi\alpha/2), \alpha\neq 1, \\ -2\beta\ln|t|/\pi, \alpha = 1, \end{cases}$$

где $\alpha\in(0;2]$, $\beta\in[-1;1]$, $\sigma>0$, $\mu\in R$.

Из представления (1) видно, что класс устойчивых случайных величин представляет собой четырехпараметрическое семейство с параметрами $\alpha, \beta, \sigma, \mu$. Если характеристическая функция случайной величины ξ удовлетворяет (1), то будем писать $\xi\sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$**.** При $\sigma = 1$ и $\mu = 0$ устойчивую случайную величину называют стандартной.

Для оценки α, которую называют индексом устойчивости, используется ряд методов. Наиболее известные – это методы В. Золотарева и Б.М. Хилла. Наряду с этими методами для оценки индекса устойчивости α рассматривается метод, предложенный в Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas (DPR-метод) [2].

Пусть $X^n = \{X_1,...,X_n\}$ – независимые одинаково распределённые случайные величины с тяжёло-хвостовой функцией распределения *F(x).* Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas [2] предложили рассматривать оценку, которая использует независимые отношения вторых наибольших порядковых статистик к наибольшим порядковым статистикам в подгруппах наблюдений.

Согласно этой оценке, выборка делится на l групп $V_1, ..., V_l$, каждая из которых содержит m случайных величин, т.е. $n=l\cdot m$. На практике выбирается m и $l=[n/m]$, где *[]* обозначает целую часть числа.

Пусть

$$M_{li}^{(1)} = \max_{j=\overline{1,m}}\{X_j : X_j\in V_i\}, \quad i=\overline{1,l}$$

и $M_{li}^{(2)}$ – второй наибольший элемент в той же группе V_i. Обозначим

$$k_{li} = \frac{M_{li}^{(2)}}{M_{li}^{(1)}},$$

$$z_l = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} k_{li}.$$

Пусть функция распределения $F(x)$ удовлетворяет, при $x \to \infty$, следующему условию:

$$1 - F(x) \sim Cx^{-\alpha} \qquad (2)$$

с параметром $0 < \alpha < \infty$, $C=const$.

Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas доказали в [2], что для $l = m = [\sqrt{n}\,]$

$$z_l \xrightarrow{п.н.} \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Тогда оценив z_l, найдём α как

$$\alpha = \frac{z_l}{1 - z_l}. \qquad (3)$$

Смоделируем устойчивую случайную величину и применим DPR-метод для оценки параметра α.

Таблица 1 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины $\xi \sim S_{0,4}(0,1,0)$ для различных n и m

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
400	0,25	**0,40**	0,32	0,59	0,43	0,59	0,14	0,14	0,26	0,26
900	0,33	0,38	**0,40**	0,37	0,42	0,45	0,83	0,50	0,72	0,36
1600	0,25	0,36	0,37	**0,39**	0,33	0,35	0,38	0,43	0,25	0,42
2500	0,29	0,30	0,32	0,35	**0,40**	0,30	0,31	0,35	0,33	0,50
3600	0,34	0,43	0,33	0,38	0,34	**0,39**	0,38	0,28	0,37	0,29
4900	0,29	0,31	0,34	0,36	0,35	0,43	**0,38**	0,32	0,41	0,37
6400	0,34	0,39	0,39	0,41	0,42	0,41	0,47	**0,39**	0,40	0,37

Таблица 2 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины $\xi \sim S_1(0,1,0)$ для различных n и m

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
400	0,96	**1,04**	1,24	0,98	0,98	1,20	1,58	0,43	0,58	0,83
900	0,76	0,96	**0,98**	1,44	1,43	0,90	1,26	0,94	0,88	1,34
1600	0,73	0,86	0,90	**1,04**	1,10	0,90	1,18	1,13	1,24	0,88
2500	0,78	0.96	1,04	0,94	**0,99**	1,15	1,11	1,44	1,25	1,42
3600	0,89	0,88	0,94	0,90	0,79	**1,03**	1,07	1,12	0,76	0,83
4900	0,81	1,00	1,01	1,07	0,96	0,90	**1,01**	0,95	1,00	0,96
6400	0,87	1,02	1,01	1,08	1,09	1,06	1,05	**1,00**	1,23	1,07

Таблица 3 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины $\xi \sim S_{1,3}(0,1,0)$ для различных n и m

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
400	1,24	**1,30**	0,94	0,95	0,86	0,96	1,17	0,85	0,68	0,63
900	0,94	1,24	**1,30**	1,04	1,22	1,14	1,05	1,13	1,42	1,14
1600	1,09	1,45	1,29	**1,32**	1,15	1,43	1,05	1,00	0,91	0,81
2500	1,18	1,28	1,31	1,36	**1,33**	1,43	1,51	1,65	1,37	1,54
3600	1,19	1,36	1,54	1,27	1,22	**1,29**	1,57	1,14	1,50	1,32
4900	1,05	1,18	1,35	1,35	1,43	1,33	**1,31**	1,15	1,38	1,31
6400	1,09	1,38	1,23	1,36	1,23	1,17	1,29	**1,31**	1,23	1,23

Таблица 4 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины $\xi \sim S_{1,9}(0,1,0)$ для различных n и m

	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
400	1,70	**1,94**	2,25	2,98	5,78	1,80	6,57	4,61	1,21	3,58
900	2,30	2,60	**2,50**	2,43	2,55	1,92	2,00	1,85	2,41	2,25
1600	2,01	2,67	3,31	**2,80**	3,04	3,07	3,28	3,77	3,72	3,43
2500	1,81	2,28	2,72	3,00	**2,80**	2,73	3,17	3,50	3,15	3,23
3600	1,70	2,95	3,38	3,32	3,19	**3,00**	2,88	3,30	4,00	3,18
4900	1,81	2,86	3,33	3,77	4,20	4,08	**4,62**	4,89	4,50	4,72
6400	1,85	3,12	3,56	3,96	3,87	3,91	3,61	**3,78**	3,70	3,78

Таблица 5 – Оценка индекса устойчивости для смоделированной устойчивой случайной величины $\xi \sim S_{1,95}(0,1,0)$ для различных n и m

	7	8	9	10	11
400	1,12	1,43	1,86	1,89	1,96
900	1,56	1,63	1,40	1,77	1,92
1600	1,33	1,54	1,68	1,82	1,98
2500	1,25	1,49	1,62	1,88	1,92
3600	1,30	1,63	1,83	1,99	2,01
4900	1,12	1,72	1,87	1,96	2,08
6400	1,23	1,63	1,85	1,92	1,99

Проанализировав результаты, можно сделать следующие выводы:

1) При $0 < \alpha < 1{,}5$

a) оценка индекса устойчивости достаточно близка к истинному значению для случая $l = m = [\sqrt{n}\,]$.

b) в случае большого количества смоделированных данных, когда $0<\alpha<1$, оценка индекса устойчивости демонстрирует постоянство при различных значениях m.

2) При $1{,}5 < \alpha < 2$

a) применять DPR-метод при оценивании индекса устойчивости становится затруднительным для случая $l = m = [\sqrt{n}\,]$.

b) для оценивания индекса устойчивости лучше делить выборку на l групп по m элементов в каждой таким образом, чтобы значение m было близким к десяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zolotarev, V. Stable distributions and their applications. VSP / V. Zolotarev, V. Uchaikin. – M., 1999.
2. Davydov, Yu. More on P-stable convex sets in Banach spaces / Yu. Davydov, V. Paulauskas, A. Rackauskas // J. Theoret. Probab. – 2000. – 13, № 1. – 39–64.

***I.I. Komarov, Chen Hailong*. The Applicability of DPR Method to the Estimation of Stability Index**

The analysis of the economic data interrelation, presented in the form of time series, is a necessary part of modern research. In the number of economic objectives and its supplements, where it is necessary to estimate only the tail of the distribution, the focus is directed to the estimation of the tail index, which is called stability index. This article deals with the DPR method. The possibility to apply the method to the estimation of stability index by the example of modeled stable random quantities is considered.