

Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь  
Установа адукацыі «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А. С. Пушкіна»

# *Вучоныя запіскі*

*Брэсцкага ўніверсітэта*

---

*Зборнік навуковых прац*

*Выпуск 16*

*Частка 2  
Прыродазнаўчыя навукі*

**Брэст • 2020**

*Заснаваны ў 2005 годзе*

*Галоўны рэдактар*

**А. М. Сендзер**

*Намеснікі галоўнага рэдактара:*

**С. М. Севярын** (*частка 1. Гуманітарныя і грамадскія навукі*)

**А. Я. Будзько** (*частка 2. Прыродазнаўчыя навукі*)

*Рэдакцыйны савет:*

**К. К. Красоўскі, Л. Г. Лысюк, Б. М. Ляпешка, З. П. Мельнікава**

*Міжнародны савет:*

**А. А. Афонін** (Расія), **Ф. Я. Васілюк** (Расія), **В. А. Главан** (Молдова),  
**Марцін Грабэ** (Германія), **М. М. Громаў** (Расія), **В. В. Дзікусар** (Расія), **Андраш Золтан** (Венгрыя),  
**Антон Мірановіч** (Польшча), **В. А. Несцяроўскі** (Украіна), **Ежы Нікітаровіч** (Польшча),  
**Станіслаў Рудальф** (Польшча), **Б. В. Саліхаў** (Расія), **В. Р. Самойленка** (Украіна),  
**Фелікс Чыжэўскі** (Польшча), **Антоні Юўка** (Польшча), **Эдвард Ярмох** (Польшча)

*Рэдакцыйная калегія:*

**Э. М. Севярын** (*адказны рэдактар Часткі 1. Гуманітарныя і грамадскія навукі*),

**Н. С. Ступень** (*адказны рэдактар Часткі 2. Прыродазнаўчыя навукі*),

**У. В. Амелькін, С. В. Арцёменка, М. А. Багдасараў, В. Ф. Байнёў, В. У. Будкевіч,**  
**А. М. Вабішчэвіч, І. Я. Валітава, В. М. Ватыль, П. А. Вадап'янаў, А. М. Вітчанка, А. А. Волчак,**  
**Т. А. Гарупа, А. М. Грыгаровіч, А. А. Гужалоўскі, А. Л. Гулевіч, Т. І. Доўнар,**  
**В. І. Іўчанкаў, М. С. Кавалевіч, Т. А. Кавальчук, Ч. С. Кірвель, У. Л. Клюня, П. П. Крусь,**  
**У. У. Лосеў, А. А. Лукашанец, М. І. Ляўчук, В. С. Манахаў, І. П. Мартынаў, А. А. Махнач,**  
**А. В. Мацвееў, У. А. Плецюхоў, С. В. Рашэтнікаў, Д. Г. Ротман, В. Ф. Русецкі,**  
**А. А. Савіч, У. С. Секяржыцкі, М. М. Сендзер, У. А. Сенькавец, Я. У. Скакун, А. С. Сляповіч,**  
**В. А. Сцепановіч, В. І. Сянкевіч, Л. Р. Цітарэнка, М. М. Труш, І. А. Швед,**  
**Я. К. Яловічава, Я. С. Яскевіч**

**Адрас рэдакцыі:**

**224665, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21**

**тэл.: 8-0162-217-207**

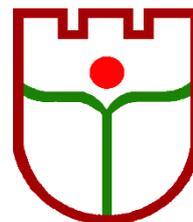
**e-mail: vesnik@brsu.brest.by**

**ISBN 978-985-22-0250-3 (ч. 2)**

**ISBN 978-985-22-0248-0**

© УА «БрДУ імя А. С. Пушкіна», 2020

# Вучоныя запіскі



Брэсцкага ўніверсітэта

ЗБОРНИК НАВУКОВЫХ ПРАЦ

2020 • Вып. 16 • Ч. 2

## ЗМЕСТ

### МАТЭМАТЫКА

- Будько А. Е.** О порядке следования команд в программах элементарных машин Тьюринга ..... 7
- Грицук Д. В.** Влияние строения силовых  $p$ -подгрупп конечной  $\pi$ -разрешимой группы на производную  $\pi$ -длину ..... 13
- Матысик О. В.** К вопросу о регуляризации некорректных уравнений первого рода ..... 19

### ФІЗІКА

- Плетюхов В. А.** Геометрические фермионы на решетке ..... 51
- Секержицкий В. С., Серый А. И.** О поляризации крайне вырожденных идеальных ферми-газов в магнитном поле ..... 69

### ХІМІЯ

- Ступень Н. С.** Гидравлическая активность комплексной фосфат-кремнеземсодержащей добавки в магнезиальный цемент на основе каустического доломита ..... 79

### БІЯЛОГІЯ

- Блоцкая Е. С., Абрамова И. В.** Биотопическое распределение, питание и динамика численности американской норки (*MUSTELA VISON L.*) в центральной и юго-западной Беларуси ..... 86
- Ленивко С. М.** Влияние стероидных соединений на рост осевых органов прорастающих семян мягкой пшеницы сорта Василиса в условиях хлоридного засоления ..... 93
- Матусевич Н. М.** Сравнительно-анатомическое изучение строения коры однолетнего стебля некоторых видов рода *CRATAEGUS L.* ..... 99
- Шкуратова Н. В.** Таксономическая структура ядовитых растений флоры Брестского района ..... 106

### НАВУКІ АБ ЗЯМЛІ

- Богдасаров А. А., Богдасаров М. А., Грядунова О. И., Житинец С. С., Строганова Н. Л.** Природные лечебные факторы санаторно-курортной организации «Брестагроздравница» ..... 115
- Гречаник Н. Ф.** Минеральный состав мелкообломочного материала тяжелой фракции сожских моренных отложений на территории Высоковской равнины ..... 130
- Красовский К. К., Сидорович А. А., Абрамова И. В.** Урбанонология как перспективная географическая специальность ..... 139
- Сидорович А. А.** Институциональный фактор трансформации рынка труда Беларуси: демографический эффект пенсионной реформы ..... 146

Ministry of Education of Republic of Belarus  
Educational Establishment  
«Brest State A. S. Pushkin University»

*Scientific  
Proceeding*  
*of Brest University*

---

*Collection of scientific works*

*Issue 16*

*Part 2  
Natural Sciences*

**Brest • 2020**

Founded 2005

*Editor-in-chief*

A. N. Sender

*Editor-in-chief Deputies*

S. M. Sevyaryn (*part 1. The Humanities and Social Sciences*)

A. Ya. Budzko (*part 2. The Natural Sciences*)

*Editorial council:*

K. K. Krasouski, L. G. Lysyuk, B. M. Lyapeshka, Z. P. Melnikava

*International council:*

A. A. Afonin (Russia), F. Ya. Vasilyuk (Russia), V. A. Glavan (Moldova),  
Martin Grabe (Germany), M. M. Gromau (Russia), V. V. Dzikusar (Russia), Andrash Zoltan (Hungary),  
Anton Miranovich (Poland), V. A. Nestsiarouski (Ukraine), Ezhy Nikitarovich (Poland),  
Stanislav Rudalf (Poland), B. V. Salikhau (Russia), V. G. Samoilenka (Ukraine),  
Felix Chizhevski (Poland), Antani Yuvka (Poland), Edvard Yarmakh (Poland)

*Editorial board:*

E. M. Sevyaryn (*managerial editor part 1. The Humanities and Social Sciences*),

N. S. Stupen (*managerial editor part 2. The Natural Sciences*),

V. V. Amelkin, S. V. Artsyomenka, M. A. Bahdasarau, V. F. Bainyou, V. U. Budkevich,  
A. M. Vabishchevich, I. Ya. Valitava, V. N. Vatyly, P. A. Vadapyanau, A. N. Vitshanka, A. A. Volchak,  
T. A. Garupa, A. M. Gryharovich, A. A. Guzhalouski, A. L. Gulevich, T. I. Dounar,  
V. I. Iuchankau, M. S. Kavalevich, T. A. Kavalchuk, C. S. Kirvel, U. L. Klyunya, P. P. Krus,  
V. V. Loseu, A. A. Lukashanets, M. I. Lyauchuk, V. S. Manakhav, Y. F. Martynau, A. A. Makhnach,  
A. V. Matsveyeu, U. A. Pletsukhou, S. V. Rashetnikau, D. G. Rotman, V. F. Rusetski,  
A. A. Savich, V. S. Sekyazhytski, M. M. Sender, V. A. Senkavets, E. V. Skakun, E. S. Slyapovich,  
V. A. Stsepanovich, V. I. Syankevich, L. R. Tsitarenka, N. N. Trush, I. A. Shved,  
Y. K. Yalovicheva, Y. S. Yaskevich

**Publishing house address:**

224665, Brest, Bulvar Kosmonavtov, 21

tel.: 8-0162-217-207

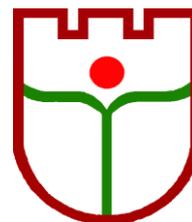
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

ISBN 978-985-22-0250-3 (p. 2)

ISBN 978-985-22-0248-0

© EE «Brest State A. S. Pushkin University», 2020

# Scientific Proceeding



of Brest University

COLLECTION OF SCIENTIFIC WORKS

---

---

2020 • Issue 16 • Part 2

## INDEX

### MATHEMATICS

**Alexandr Budko.** On the Order of Following Commands in Programs of Elementary Turing Machines.....7

**Dmitriy Gritsuk.** Influence of the Structure of the Sylow  $p$ -Subgroups of the Finite  $\pi$ -Solvable Group on the Derivative  $\pi$ -Length ..... 13

**Oleg Matysik.** To the Question of Regularization of Incorrect Equations of the First Kind..... 19

### PHYSICS

**Vladimir Pletukhov.** Geometric Fermions on a Lattice .....51

**Vladimir Sekerzhitsky, Alexey Sery.** On the Polarization of Extremely Degenerate Ideal Fermi-Gases in Magnetic Field .....69

### CHEMISTRY

**Nonna Stupen.** Hydraulic Activity of the Complex Phosphate-Silica-Containing Additive in Magnesia Cement Based on Caustic .....79

### BIOLOGY

**Yelena Blockaja, Irina Abramova.** Biotopic Distribution, Trophic and Dynamic Quantity of the American Mink (*MUSTELA VISON L.*) in the Central and South-West of Belarus .....86

**Svetlana Lenivko.** The Effect of Steroid Compounds on the Growth of the Axial Organs of Germinating Seeds of Soft Wheat of the Cultivar Vasilisa under Conditions of Chloride Salinity .....93

**Natalya Matusевич.** Comparative-Anatomical Study of the Structure of the One-Year-Old Stem Crust of Some Species of the Genus CRATAEGUS L. ....99

**Natalya Shkuratova.** Taxonomic Structure of Poisonous Plants in Flora of Brest Region ..... 106

### SCIENCES ON EARTH

**Albert Bogdasarov, Maxim Bogdasarov, Oxana Gryadunova, Sergey Zhitinets, Natalya Stroganova.** Natural Healing Factors of the Sanatorium-Resort Organization «Brestagrozdavnitsa» ..... 115

**Mikalai Grachanik.** Mineral Composition of Fine-Detrital Material of the Heavy Fraktion of the Sozh Moraine Deposits in the Territory of the Vysokovskaya Plain ..... 130

**Konstantin Krasovskiy, Alexandr Sidorovich, Irina Abramova.** Urbanology as a Perspective Geographic Specialty..... 139

**Alexandr Sidorovich.** Institutional Factor of Transformation of the Labor Market in Belarus: Demographic Effect of Pension Reform ..... 146

---

---



УДК 510.522

**Александр Евгеньевич Будько**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии  
и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Alexandr Budko**

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor  
of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [budzko@brsu.brest.by](mailto:budzko@brsu.brest.by)

## О ПОРЯДКЕ СЛЕДОВАНИЯ КОМАНД В ПРОГРАММАХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАШИН ТЬЮРИНГА

*Рассматривается одноленточная машина Тьюринга с внешним алфавитом, состоящим из двух символов. Программа машины задается списком команд. Определяется, каким образом машина отыскивает очередную команду в своей программе, которую она должна выполнять. Определяется оптимальный порядок следования команд в программе как порядок, при котором время их отыскания будет наименьшим. Под наименьшим понимается наименьшее среднее время как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций. Исходя из структуры программы машины, заданной графом, определяются элементарные машины Тьюринга. Для элементарных машин указан оптимальный порядок следования команд и определено минимальное время их отыскания.*

### *On the Order of Following Commands in Programs of Elementary Turing Machines*

*The article investigates a single-tape Turing machine with external alphabet, consisting of two symbols. The machine's program is set by the order of commands. The article defines the way in which the machine retrieves a further command in the program to be executed. The optimal order of following commands in programs is defined as the order in which command retrieval time is the shortest. The shortest retrieval time is the least average time as the ratio of the sum of the retrieval time over all initial configurations to the number of these configurations. Based on the structure of the program of the machine given by the graph, elementary Turing machines are determined. For the elementary machines the optimal order of following commands is defined as well as the minimal retrieval time.*

### **Введение**

Машина Тьюринга является классической моделью алгоритма и позволяет исследовать его свойства. Безусловно, наибольшее количество исследований посвящено рассмотрению сложности вычислений на машинах Тьюринга. Обзоры исследований по данному направлению даны в [1; 2]. Близким к этому направлению является исследование сложности универсальных машин [3–5]. Ряд работ посвящен разработке методов построения машин Тьюринга [6–8]. Разрабатывается также программное обеспечение анимации работы машины [9]. Данная работа посвящена нахождению оптимального порядка следования команд в программах элементарных машин Тьюринга.

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и с внешним алфавитом  $\{0,1\}$ . За один такт головка каждой такой машины выполняет три действия: 1) записывает в обозреваемую ячейку символ; 2) сдвигается влево (Л) или вправо (П) к соседней ячейке или остается на месте (С); 3) переходит в новое внутреннее состояние или остается в том же.

Программу машины Тьюринга можно задавать как списком команд, так и ориентированным графом. При задании списком программа определяется перечнем команд



вида  $q_i a_i \rightarrow a_k D q_j$ , где  $q_i, q_j$  – внутренние состояния машины,  $a_i, a_k \in \{0,1\}$ ,  $D \in \{L, P, C\}$ . Состояние  $q_0$  называется конечным и команда, в правой части которой записано это состояние, – тоже конечной. В каждой строке списка находится ровно одна команда. Будем считать, что машина следующим образом отыскивает в списке команду, которую она должна выполнять в данный момент:

1. Пусть в начальный момент головка обзревает символ  $a_r$ . Тогда машина, начиная с первой команды списка, сравнивает  $q_1 a_r$  с левыми частями команд до тех пор, пока не найдёт команду с левой частью  $q_1 a_r$ , которую она и будет выполнять.

2. Пусть в момент после выполнения команды  $q_i a_i \rightarrow a_k D q_j$  ( $q_j \neq q_0$ ) головка обзревает символ  $a_c$ . Тогда, начиная с команды, следующей за выполненной, машина сравнивает  $q_j a_c$  с левыми частями команд списка до тех пор, пока не найдет команду с левой частью  $q_j a_c$ , которую она и будет выполнять.

3. Сравнение производится в том порядке, в котором команды следуют в списке. При этом, если после сравнения с левой частью последней команды списка нужная команда не найдена, сравнение продолжается начиная с первой команды списка.

4. Сравнение любого  $q_j a_k$  с левой частью любой команды списка проводится за одинаковое время: за одну единицу времени.

В настоящей работе рассматривается нахождение такого порядка следования команд в программе, заданной списком, при котором время отыскания команд будет наименьшим. При этом под наименьшим будем понимать наименьшее среднее время отыскания как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций. Кроме того, будем рассматривать только те начальные конфигурации, у которых головка за время выполнения программы просматривает все символы начальной конфигурации. Порядок следования команд, соответствующий наименьшему среднему времени их отыскания, назовем оптимальным.

Кроме задания программы в виде списка команд будем использовать еще и представление программы в виде ориентированного графа. В этом графе внутренним состояниям машины Тьюринга будут соответствовать вершины, а дуги будут определять команды.

**Лемма 1** [10]. При оптимальном порядке команды любого пути из начальной вершины в конечную следуют в порядке, определяемом дугами этого пути.

В [11] введена классификация  $L_0, L_1, L_2, \dots$  машин Тьюринга в зависимости от структуры графа, задающего программу машины. К классу  $L_0$  относятся машины, программы которых заданы графами и удовлетворяют следующим требованиям:

1. Из каждой неконечной вершины исходят ровно две дуги.
2. Граф является связным и не содержит циклов.
3. В каждую неконечную вершину, отличную от начальной, входит ровно одна дуга. В начальную вершину не входит ни одна дуга.

Пусть  $n$  – число внутренних состояний машины, исключая конечное. Машину Тьюринга класса  $L_0$  назовем элементарной, если в ее программе, заданной графом,



из каждой вершины  $i$  ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) одна дуга уходит в вершину  $i + 1$ , а другая – в конечную вершину.

Будем считать, что для каждого пути графа из начальной вершины в конечную имеется начальная конфигурация, при работе над которой выполняются все команды, определяемые дугами данного пути.

**Теорема 1.** Для элементарной машины Тьюринга, имеющей  $n$  внутренних состояний, выполняются следующие утверждения:

1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна  $n^2 + 2n$ ;

2) оптимальным является тот порядок, при котором вначале следуют команды дуг, исходящих из вершины 1, затем – команды дуг, исходящих из вершины 2, и т. д. При этом в каждой паре команд дуг, исходящих из вершины  $i$  ( $1 \leq i \leq n - 1$ ), первой следует команда дуги, уходящей в конечную вершину.

**Доказательство.** Доказательство теоремы проведем по принципу математической индукции относительно  $n$ .

1.  $n = 1$ . В этом случае программа машины состоит из двух команд и различных порядков следования этих команд будет два. Различных начальных конфигураций будет тоже две:  $q_1 0$  и  $q_1 1$ . Непосредственной проверкой можно убедиться, что для каждого порядка следования команд сумма времени отыскания команд будет равна 3. Следовательно, каждый из этих порядков является оптимальным, а указанная сумма времени – минимальной.

2. Пусть для  $n = k$  доказываемое утверждение выполняется. Рассмотрим машину  $M$  с  $n = k + 1$  внутренними состояниями, отличными от состояния  $q_0$ . Машину  $M$  можно рассматривать как последовательное соединение двух машин  $M_1$  и  $M_2$ . Машина  $M_1$  состоит из двух команд, которые соответствуют дугам, исходящим из вершины 1. Машина  $M_2$  определяется подграфом с начальной вершиной 2 и имеет  $k$  внутренних состояний.

Для машины  $M$  различных начальных конфигураций имеется, очевидно,  $k + 2$ . Эти конфигурации определяются  $k + 2$  путями  $H_1, H_2, H_3, \dots, H_k, H_{k+1}, H_{k+2}$  из начальной вершины в конечную, длины которых соответственно равны  $1, 2, 3, \dots, k, k + 1, k + 1$ . Обозначим эти конфигурации соответственно через  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$ .

Возможны следующие случаи следования команд в программе машины  $M$ .

*Случай 1.* Команда дуги, выходящей из вершины 1 в конечную вершину, в списке команд находится на первом месте. Тогда время отыскания команд при работе над конфигурацией  $P_1$  будет равно 1.

*Случай 1.1.* Команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, в списке команд находится на втором месте. Это значит, что в списке команд машины  $M$  первой и второй следуют команды машины  $M_1$ , а затем – команды машины  $M_2$ .

Определим время отыскания команд машины  $M$  при работе над  $k + 1$  начальными конфигурациями  $P_2, P_3, \dots, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$ . При работе над каждой из этих конфигураций вначале выполняется команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, и затем начинает работать машина  $M_2$ . Время отыскания первой выполняемой команды равно 2, т. к. эта команда в списке следует второй. По всем  $k + 1$  начальным конфигурациям время отыскания этой команды будет равно  $2(k + 1)$ .

Машина  $M_2$  имеет  $k$  внутренних состояний, и по индуктивному предположению минимальное время отыскания команд при их порядке следования, описанном в усло-



вии теоремы, для этой машины равно  $k^2 + 2k$ . Тогда время отыскания команд при работе машины  $M_2$  будет равно

$$(k^2 + 2k) + 2(k + 1) = k^2 + 4k + 2.$$

Следовательно, общее время отыскания команд при работе машины  $M$  будет равно

$$1 + k^2 + 4k + 2 = k^2 + 4k + 3 = n^2 + 2n,$$

т. к.  $n = k + 1$ . При этом порядок следования команд в программе машины  $M$  в случае 1.1 соответствует п. 2) теоремы 1.

*Случай 1.2.* Команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, в списке команд находится на  $s$ -ом ( $s \geq 3$ ) месте. В этом случае порядок следования команд не является оптимальным. Действительно, в силу условия случая 1 и в соответствии с леммой 1 для каждого из путей  $H_2, H_3, \dots, H_k, H_{k+1}, H_{k+2}$  команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, в списке команд машины  $M$  должна находиться на втором месте, а не на  $s$ -ом ( $s \geq 3$ ).

*Случай 2.* Команда дуги, выходящей из вершины 1 в конечную вершину, в списке команд находится на втором месте. Тогда время отыскания команд при работе над конфигурацией  $P_1$  будет равно 2.

*Случай 2.1.* Первой в списке следует команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2.

Тогда аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении случая 1.1, можно показать, что минимальное время отыскания команд при работе машины  $M_2$  над  $k + 1$  начальными конфигурациями  $P_2, P_3, \dots, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$  будет равно

$$(k^2 + 2k) + 2(k + 1) = k^2 + 4k + 2.$$

Тогда общее время отыскания команд при работе машины  $M$  будет равно

$$2 + k^2 + 4k + 2 = k^2 + 4k + 4 = n^2 + 2n + 1,$$

т. к.  $n = k + 1$ . Таким образом, в случае 2.1 сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям будет больше, чем в случае 1.1, т. е. минимальной не является.

*Случай 2.2.* Первой в списке следует одна из команд машины  $M_2$ . Тогда команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, будет находиться на  $s$ -ом ( $s \geq 3$ ) месте. В этом случае, как и в случае 1.2, в силу леммы 1 данный порядок следования команд оптимальным не является.

*Случай 3.* Команда дуги, выходящей из вершины 1 в конечную вершину, в списке команд находится на  $t$ -ом ( $t \geq 3$ ) месте. Тогда время отыскания команд при работе над конфигурацией  $P_1$  будет равно  $t$ .

*Случай 3.1.* Команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, в списке команд находится на первом месте.

При работе над каждой из конфигураций  $P_2, P_3, \dots, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$  вначале выполняется команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, и затем начинает работать машина  $M_2$ . Время отыскания первой выполняемой команды равно 1, т. к. эта команда в списке находится на 1-ом месте. По всем  $k + 1$  начальным конфигурациям время отыскания этой команды будет равно  $1(k + 1) = k + 1$ . После выполнения этой команды начинает работать машина  $M_2$ .



При работе машины  $M_2$  команда, находящаяся на  $t$ -ом месте, не выполняется. Поэтому без учета этой команды минимальное время отыскания команд при работе машины  $M_2$  по индуктивному предположению будет равно  $k^2 + 2k$ .

Минимальное время достигается при оптимальном порядке следования команд, указанном в условии теоремы. При добавлении в оптимальный порядок на  $t$ -ое место команды дуги, выходящей из вершины 1 в конечную вершину, эта команда при работе машины  $M_2$  над  $\lfloor (t-1)/2 \rfloor - 1$  конфигурациями  $P_2, P_3, \dots, P_{\lfloor (t-1)/2 \rfloor}$ , очевидно, не просматривается, где  $\lfloor a \rfloor$  – целая часть числа  $a$ . При работе над каждой из  $(k+2) - (\lfloor (t-1)/2 \rfloor - 1)$  конфигураций

$$P_{\lfloor (t-1)/2 \rfloor + 1}, P_{\lfloor (t-1)/2 \rfloor + 2}, \dots, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$$

команда, находящаяся на  $t$ -ом месте, просматривается и за счет этого время отыскания команд увеличивается на единицу. По всем  $(k+3) - \lfloor (t-1)/2 \rfloor$  конфигурациям увеличение составит  $(k+3) - \lfloor (t-1)/2 \rfloor$ .

Следовательно, общее время отыскания команд при работе машины  $M_2$  будет равно

$$(k+1) + (k^2 + 2k) + (k+3) - \lfloor (t-1)/2 \rfloor = k^2 + 4k + 4 - \lfloor (t-1)/2 \rfloor.$$

Тогда общее время отыскания команд при работе машины  $M$  будет равно

$$t + k^2 + 4k + 4 - \lfloor (t-1)/2 \rfloor \geq k^2 + 4k + 4 + \lfloor (t+1)/2 \rfloor \geq k^2 + 4k + 6 = n^2 + 2n + 3,$$

т. к.  $t \geq 3$  и  $n = k+1$ . Таким образом, в случае 3.1 сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям минимальной не является.

*Случай 3.2.* Команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, в списке команд находится на  $s$ -ом месте ( $s \geq 2$ ). В этом случае порядок следования команд не является оптимальным. Действительно, в силу условия случая 3 и в соответствии с леммой 1 для каждого из путей  $H_2, H_3, \dots, H_k, H_{k+1}, H_{k+2}$  команда дуги, выходящей из вершины 1 в вершину 2, в списке команд машины  $M$  должна находиться на первом месте, а не на  $s$ -ом ( $s \geq 2$ ).

Таким образом, сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям минимальной является только в случае 1.1, и этот случай соответствует порядку следования, указанному в п. 2) теоремы. Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** Для элементарной машины Тьюринга минимальное среднее время отыскания команд по всем начальным конфигурациям равно

$$\frac{n^2 + 2n}{n+1} = n + \frac{n}{n+1}.$$

**Замечание.** Мы рассматривали машину Тьюринга, у которых головка за один такт выполняет три действия: 1) записывает в обозреваемую ячейку символ; 2) сдвигается влево или вправо к соседней ячейке или остаётся на месте; 3) переходит в новое



внутреннее состояние или остается в том же. Очевидно, полученные результаты остаются в силе, если головка машины за один такт будет выполнять два действия: 1) записывать в обозреваемую ячейку символ или выполнять сдвиг головки; 2) переходить в новое внутреннее состояние или оставаться в том же. Такая машина является машиной Поста [12].

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченков, С. С. Сложность алгоритмов и вычислений / С. С. Марченков, В. Л. Матросов // Итоги науки и техники. Сер. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика». – 1979. – Т. 16. – С. 103–149.
2. Слисенко, О. А. Сложностные задачи теории вычислений / О. А. Слисенко // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 6 (222). – С. 21–103.
3. Минский, М. Вычисления и автоматы / М. Минский. – М. : Мир, 1971. – 281 с.
4. Крюков, Ю. А. Машины Тьюринга с тремя состояниями и двумя символами и одним состоянием и  $n$  символами / Ю. А. Крюков // Кибернетика. – 1971. – № 1. – С. 12–13.
5. Herman, G. T. The halting problem of one state Turing machines with  $n$ -dimensional tape / G. T. Herman // Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. – 1968. – nr 2. – P. 185–191.
6. Мальцев, А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1986. – 368 с.
7. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высш. шк., 2006. – 386 с.
8. Будько, А. Е. Об одном методе построения машин Тьюринга / А. Е. Будько // Мат. кибернетика в приложениях. – Минск : МГПИ, 1985. – С. 20–27.
9. Ясюкович, Э. И. Разработка алгоритма и программного обеспечения детерминированной машины Тьюринга / Э. И. Ясюкович // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 13–22.
10. Будько, А. Е. О некоторых свойствах оптимального порядка следования команд в программах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Нанопроектирование, технология, компьютерное моделирование (НПТКМ-2019) : материалы 18-го Междунар. симп. по новым приложениям высоких технологий, посвящ. памяти В. А. Пальмова, Брест, сентябрь 2019 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 16–18.
11. Будько, А. Е. О двух классах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Докл. АН БССР. – 1985. – № 9. – С. 792–793.
12. Post, E. L. Finite combinatory processes – formulation 1 / E. L. Post // J. Symbolic Logic. – 1936. – № 3. – P. 103–105.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 01.09.2020*



УДК 512.542

**Дмитрий Владимирович Грицук**

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Dmitriy Gritsuk**

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics  
of the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [dmitry.gritsuk@gmail.com](mailto:dmitry.gritsuk@gmail.com)

## ВЛИЯНИЕ СТРОЕНИЯ СИЛОВСКИХ $p$ -ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ $\pi$ -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ НА ПРОИЗВОДНУЮ $\pi$ -ДЛИНУ

Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом  $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$ , факторы  $G_{i+1}/G_i$  которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами. Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  называется производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы. Приводится обзор оценок производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы с заданными силовскими  $p$ -подгруппами.

### Influence of the Structure of the Sylow $p$ -Subgroups of the Finite $\pi$ -Solvable Group on the Derivative $\pi$ -Length

Let  $G$  is a  $\pi$ -solvable group. Then it has a subnormal series  $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$  whose factors  $G_{i+1}/G_i$  are either  $\pi'$ -groups or abelian  $\pi$ -groups. The smallest number of Abelian  $\pi$ -factors among all such subnormal series of a  $\pi$ -solvable group  $G$  is called the derivative of the  $\pi$ -length of the  $\pi$ -solvable group. This article provides an overview of estimates for the derivative of the  $\pi$ -length of a finite  $\pi$ -solvable group with a given Sylow  $p$ -subgroups.

### Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в книгах [1; 2].

Пусть  $P$  – множество всех простых чисел, а  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Дополнение к  $\pi$  во множестве  $P$  обозначается через  $\pi'$ . Символом  $\pi$  обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел  $N$  следующим образом:  $\pi(a)$  – множество простых чисел, делящих натуральное число  $a$ . Для группы  $G$  и ее подгруппы  $H$  считаем, что  $\pi(G) = \pi(|G|)$  и  $\pi(G:H) = \pi(|G:H|)$ . Зафиксируем множество простых чисел  $\pi$ . Если  $\pi(m) \subseteq \pi$ , то натуральное число  $m$  называется  $\pi$ -числом. Группа  $G$  называется  $\pi$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi$ , и  $\pi'$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi'$ . В этом случае  $\pi(G) \cap \pi' = \emptyset$ .

Наименьшее натуральное число  $n$ , для которого выполняется равенство  $G^{(n)} = 1$ , называют производной длиной группы  $G$  и обозначают через  $d(G)$ . Здесь  $G'$  – коммутант группы  $G$  и  $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ .

Ряд подгрупп  $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1$  называется субнормальным, если для любого  $i$  подгруппа  $G_i$  нормальна в  $G_{i-1}$ , и нормальным, если  $G_i$  нормальна в  $G$  для всех  $i$ .



Группа называется  $\pi$ -разрешимой, если она обладает нормальным рядом, факторы которого являются либо разрешимыми  $\pi$ -группами, либо  $\pi'$ -группами. Таким образом, у  $\pi$ -отделимой группы  $G$  существует ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (1)$$

где  $G_i$  нормальна в  $G$  и фактор  $G_{i-1}/G_i$  либо разрешимая  $\pi$ -группа, либо  $\pi'$ -группа,  $i = 1, \dots, n$ . Ряд (1) будем называть нормальным  $(\pi', \pi)$ -рядом группы  $G$ . Наименьшее число  $\pi$ -факторов среди всех нормальных  $(\pi', \pi)$ -рядов группы  $G$  называется  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi(G)$ . Поскольку  $\pi$ -факторы  $(\pi', \pi)$ -ряда  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  разрешимы, то каждая  $\pi$ -разрешимая группа обладает  $(\pi', \pi^n)$ -рядом, т. е. таким нормальным  $(\pi', \pi)$ -рядом, у которого все  $\pi$ -факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных  $\pi$ -факторов среди всех  $(\pi', \pi^n)$ -рядов группы  $G$  называется нильпотентной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi^n(G)$ .

Теперь введем понятие производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы. Обратим внимание на то, что здесь будут использоваться субнормальные ряды. Пусть группа  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным  $(\pi', \pi^a)$ -рядом, т. е. таким субнормальным рядом

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1,$$

факторы  $G_{i-1}/G_i$  которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами. Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди всех субнормальных  $(\pi', \pi^a)$ -рядов группы  $G$  называется производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi^a(G)$ . Ясно, что в случае, когда  $\pi = \pi(G)$  значение  $l_\pi^a(G)$  совпадает со значением производной длины группы  $G$ . Данное понятие предложил в 2006 г. В. С. Монахов [3]. Начальные свойства производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы получены в работе [4]. В частности, в данной работе доказано, что

$$d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G) \leq d(G_\pi) \cdot l_\pi(G),$$

где  $l_\pi(G)$  –  $\pi$ -длина  $\pi$ -разрешимой группы  $G$ .

В данной заметке приводится обзор оценок производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы в зависимости от строения ее силовских  $p$ -подгрупп.

### 1. Оценки производной $\pi$ -длины $\pi$ -разрешимой группы в зависимости от строения силовских подгрупп

Первые исследования производной  $\pi$ -длины в зависимости от строения силовских  $p$ -подгрупп проведены в работе [4].

**Теорема 1** [4]. 1. Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$  силовские  $p$ -подгруппы циклические для всех  $p \in \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ .

2. Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$  силовские  $p$ -подгруппы абелевы для всех  $p \in \pi$ , то  $l_\pi^a(G) = d(G_\pi) \leq |\pi(G_\pi)|$ .

**Теорема 2.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, силовские  $p$ -подгруппы которой либо циклические, либо имеют порядок  $p^2$  для всех  $p \in \pi$ . Тогда  $l_\pi^a(G) \leq 3$ . В частности, если  $2 \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ .

Доказательство. Ясно, что в любой фактор-группе группы  $G$  силовские  $p$ -подгруппы являются либо циклическими, либо имеют порядок  $p^2$ . Поэтому можно вос-



пользоваться индукцией по порядку группы  $G$ . Получаем, что  $O_{\pi'}(G) = 1$ , в группе  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа

$$l_{\pi}^a(G/F(G)) \leq O_p(G) = F(O_{\pi}(G)), C_G(F(G)) \subseteq F(G), O_{p'}(G) = 1$$

для некоторого простого  $p \in \pi$ .

Если  $F(G)$  циклическая, то фактор-группа  $G_{\pi}/F(G)$  абелева как группа автоморфизмов циклической группы  $F(G)$ . Поэтому  $l_{\pi}^a(G/F(G)) \leq 1$ . Так как

$$l_{\pi}^a(G) \leq l_{\pi}^a(G/F(G)) + l_{\pi}^a(F(G)), \quad (2)$$

то  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ .

Пусть  $|F(G)| = p^2$  и  $F(G) = G_p$ . Если  $2 \notin \pi$ , то фактор-группа  $G_{\pi}/F(G)$  абелева. Значит,  $l_{\pi}^a(G/F(G)) \leq 1$ . По (2) получаем, что  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ .

Если  $2 \in \pi$ , то

$$l_{\pi}^a(G) \leq l_{\pi \setminus \{2\}}^a(G) + l_2^a(G).$$

Так как  $l_2^a(G) \leq 1$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 3$ . Теорема доказана.

**Пример 1.** В библиотеке SmallGroups компьютерной системы GAP [5; 6] под номером 34 указана разрешимая группа  $G = Z_{49} \times ([Z_5 \times Z_5]Z_9)Z_2$  порядка  $22050 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ . Пусть  $\pi = \{2, 3, 5\}$ . У группы  $G$  силовская 2-подгруппа  $G_2 \cong Z_2$  циклическая, а силовские 3-подгруппа и 5-подгруппа имеют порядок  $3^2$  и  $5^2$  соответственно. Для группы  $G$  можно построить нормальный ряд

$$G = Z_{49} \times ([Z_5 \times Z_5]Z_9)Z_2 \supseteq [Z_5 \times Z_5]Z_9 \supseteq [Z_5 \times Z_5]Z_9 \supseteq Z_5 \times Z_5 \supseteq 1,$$

в котором факторы либо 7-группы, либо абелевы  $\{2, 3, 5\}$ -группы. Поэтому  $l_{\pi}^a(G) \leq 3$ . Так как  $G_{\pi} = [Z_5 \times Z_5]Z_9$  и  $d(G_{\pi}) = 3$ , то  $l_{\pi}^a(G) = 3$ .

Пример 1 подтверждает точность оценки, полученной в теореме 2.

В работе [7] получены оценки производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, у которой силовские  $p$ -подгруппы бициклические для всех  $p \in \pi$ . Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Общие свойства бициклических групп можно найти в монографии [1].

**Теорема 2** [7, 8]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа с бициклическими силовскими  $p$ -подгруппами для всех  $p \in \pi$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 3$ ;
- 2) если  $2 \in \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 6$ .

С учетом того, что  $d(G_{\pi}) \leq l_{\pi}^a(G)$  при  $\pi = \pi(G)$ , из теоремы 2 получаем два следствия.

**Следствие 2.1.** Если  $G$  – разрешимая группа с бициклическими силовскими подгруппами, то  $d(G) \leq 6$ .

**Следствие 2.2.** Если  $G$  – группа нечетного порядка с метациклическими силовскими  $p$ -подгруппами для всех  $p \in \pi$ , то  $d(G) \leq 3$ .

В работе [9] проведены исследования производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, у которой силовские  $p$ -подгруппы абелевы или экстраспециальны для всех  $p \in \pi$ . Напомним, что экстраспециальной называют  $p$ -группу, у которой коммутант, центр и подгруппа Фраттини имеют порядок  $p$ .

**Теорема 3** [9]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, у которой для каждого  $r \in \pi$  силовская  $r$ -подгруппа абелева или экстраспециальна. Тогда  $l_{\pi}^a(G) \leq 2 \cdot |\pi(G_{\pi})|$ .



**Следствие 3.1.** Пусть  $G$  – разрешимая группа, у которой для каждого  $r \in \pi$  силовская  $r$ -подгруппа абелева или экстраспециальна. Тогда  $d(G) \leq 2 \cdot |\pi(G)|$ .

Метациклическая группа – это группа, содержащая циклическую нормальную подгруппу, фактор-группа по которой также циклическая. Ясно, что метациклическая группа всегда является бициклической. Бициклическая примарная группа нечетного порядка является метациклической [1]. Бициклические 2-группы и непримарные бициклические группы нечетного порядка могут быть неметациклическими

**Теорема 4 [10].** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, силовские  $p$ -подгруппы которой метациклические для всех  $p \in \pi$ . Тогда если  $2 \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

**Теорема 5 [11].** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и для каждого  $p \in \pi$  силовская  $p$ -подгруппа абелева либо является группой Миллера-Морено.

$$l_\pi^a(G) \leq 2 \cdot |\pi(G_\pi)|.$$

В работе [12] проведены исследования  $\pi$ -разрешимых групп, силовские  $p$ -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок  $p^3$  для всех  $p \in \pi$ , и получены оценки производной  $\pi$ -длины таких групп.

**Теорема 6 [12].** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, силовские  $p$ -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок  $p^3$  для всех  $p \in \pi$ . Тогда:

- 1) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 4$ ;
- 2) если  $2 \in \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 7$ .

Напомним, что нормальный ранг  $r_n(P)$  конечной  $p$ -группы  $P$  определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \triangleleft P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где  $X$  пробегает все нормальные подгруппы группы  $P$ , в т. ч. и  $P$ . Здесь  $\Phi(X)$  – подгруппа Фраттини группы  $X$ . В работе [13] исследовано влияние нормального ранга силовских подгрупп на оценку производной  $\pi$ -длины.

**Теорема 7 [13].** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа такая, что  $r_n(P) \leq 2$  для любой силовской  $p$ -подгруппы  $P$ ,  $p \in \pi$ . Тогда:

- 1) если  $\{2, 3\} \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ ;
- 2) если  $\{2, 3\} \in \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 9$ .

Напомним, что число  $n$  свободно от  $m$ -х степеней, если  $p^m$  не делит  $n$  для всех простых  $p$ . При  $m = 2$  говорят, что  $n$  свободно от квадратов, при  $m = 3$  – от кубов. В работе [14] исследовались оценки производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, у которой порядки силовских  $p$ -подгрупп свободны от  $n$ -ых степеней.

**Теорема 8 [14].** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа такая, что порядок любой силовской  $p$ -подгруппы  $P$ ,  $p \in \pi$  свободен от  $n$ -ых степеней. Тогда, если  $\{2, 3\} \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq |\pi(G_\pi)| \frac{n+1}{2}$ , и если  $\{2, 3\} \in \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq |\pi(G_\pi)| \left(\frac{n}{2} + 1\right)$ .

**Теорема 9 [14].** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Если небициклические силовские  $p$ -подгруппы  $\pi$ -холловой подгруппы группы  $G$ ,  $p \in \pi$  имеют порядки  $2^3, 3^3, 2^4, 2^5$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 6$ . В частности, если  $2 \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .



## 2. Исследование строения $\pi$ -разрешимой группы, у которой силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения

Нахождение оценок производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов.

Если у группы  $G$  имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то несложно проверить, что  $G$  сверхразрешима. Поэтому группа  $G$  дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, и нильпотентная длина группы  $G$  не выше 2. Поскольку любая  $p$ -группа имеет нормальный ряд с факторами простых порядков, то производную длину таких групп ограничить сверху нельзя. Однако производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  будет не выше 2.

Исследование разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в 2009 г. в работе [15]. В частности, получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и  $p$ -длины) таких разрешимых групп. В 2013 г. [16] получено развитие теоремы Бэра о сверхразрешимости группы, у которой на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга факторы имеют простые порядки. В частности, получены оценки производной длины, нильпотентной длины и  $\pi$ -длины разрешимой группы, у которой на участке нормального ряда между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга силовские подгруппы факторов являются бициклическими.

Развитием данного направления исследования частично разрешимых групп является теорема 10.

**Теорема 10** [16]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Если группа  $G$  обладает нормальным рядом, силовские подгруппы  $\pi$ -факторов которого являются:

- 1) циклическими, то  $l_\pi(G) \leq 1, l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G) \leq 2$ ;
- 2) метациклическими, то  $l_\pi(G) \leq 2, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 10$ , если  $2 \in \pi$ ;
- 3) бициклическими, то  $l_\pi(G) \leq 2, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 10$ , если  $2 \in \pi$ ;
- 4) либо бициклическими, либо свободными от четвертых степеней, то

$$l_\pi(G) \leq 3, l_\pi^n(G) \leq 4, l_\pi^a(G) \leq 18, \text{ если } 2 \in \pi.$$

### Заключение

Получение новых оценок производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы имеет важное значение не только для теории конечных групп и их классов, а и в современной криптографии. В частности, полученные оценки будут полезны при получении новых шифров и новых криптосистем с высокой эффективностью и криптостойкостью. Найденные оценки производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы могут стать основой для создания новых методов современной теории защиты информации и теории кодирования.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967.
2. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.



3. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // *Мат. заметки*. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
4. Грицук, Д. В. О производной  $\pi$ -длине  $\pi$ -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // *Вестн. БГУ. Сер. 1*. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
5. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms and Programming [Electronic resource]. – Version 4.4; 2016. – Mode of access: <http://gap-system.org>.
6. Грицук, Д. В. Компьютерная алгебра : курс лекций / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук. – Брест : БрГУ, 2017. – 112 с.
7. Грицук, Д. В. О конечных  $\pi$ -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
8. Monakhov, V. S. On derived  $\pi$ -length of a finite  $\pi$ -solvable group with supersolvable  $\pi$ -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // *Algebra and Discrete Mathematics*. – 2013. – Vol. 16, Nr 2. – P. 233–241.
9. Грицук, Д. В. О разрешимых группах, силовские подгруппы которых абелевы или экстраспециальны / Д. В. Грицук, В. С. Монахов // *Тр. Ин-та математики НАН*. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 3–9.
10. Монахов, В. С. О производной  $\pi$ -длине конечной  $\pi$ -разрешимой группы с заданной  $\pi$ -холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 215–223.
11. Грицук, Д. В. Производная  $\pi$ -длина  $\pi$ -разрешимой группы, силовские  $p$ -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок  $p^3$  / Д. В. Грицук // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
12. Грицук, Д. В. Инварианты  $\pi$ -разрешимых групп с силовскими подгруппами малого нормального ранга / Д. В. Грицук, Д. Д. Даудов, А. А. Трофимук // *Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика*. – 2016. – № 1. – С. 53–59.
13. Грицук, Д. В. Оценки производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, у которой  $\pi$ -холловы подгруппы свободны от  $n$ -ых степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артющеня // *Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова*. – 2017. – № 1 (98). – С. 11–15.
14. Monakhov, V. S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // *Communications in Algebra*. – 2011. – Vol. 39, Nr 9. – P. 3178–3186.
15. Трофимук, А. А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 304–307.
16. Грицук, Д. В. Инварианты  $\pi$ -разрешимой группы, у которой силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. В. Бондарук // *Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка*. – 2018. – № 2. – С. 77–83.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 09.10.2020*



УДК 519.6 + 517.983.54

**Олег Викторович Матысик**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Oleg Matysik**

PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics  
of the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [matysikoleg@mail.ru](mailto:matysikoleg@mail.ru)

## К ВОПРОСУ О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

*Проводится обзор разнообразных разработанных явных и неявных итерационных схем решения некорректных задач. Рассматриваются случаи неединственности и неустойчивости решения операторного уравнения первого рода, априорный выбор параметра регуляризации, возможность применения для итерационных методов правил останова в процессе вычислений (остановы по малости невязки и по поправкам (по соседним приближениям)).*

### To the Question of Regularization of Incorrect Equations of the First Kind

*In the work devoted to the theory of iterative methods for solving ill-posed linear problems, a review of various developed explicit and implicit iterative schemes for solving ill-posed problems is carried out. We consider the cases of non-uniqueness and instability of the solution to the operator equation of the first kind, the a priori choice of the regularization parameter, the possibility of using stopping rules for iterative methods in the computation process (stopping by the smallness of the discrepancy and by corrections (by neighboring approximations)).*

**1.** Настоящая работа посвящена теории итерационных методов решения некорректных линейных задач, или, другими словами, теории итерационных методов решения операторных уравнений I рода.

В последние десятилетия математическая наука обогатилась важным разделом – теорией некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения. Развитие этого раздела математики вызвано многочисленными приложениями в технике, физике, экономике и других естественных науках.

Потребности практики приводят к необходимости решения подобных задач, которые во многих случаях описываются операторными уравнениями I рода. В настоящее время теория некорректных задач успешно применяется для решения широкого круга обратных задач оптики и спектроскопии, электродинамики, радиоастрономии, диагностики плазмы, геофизики, теории потенциала и гравиметрии. Для их решения широко используются итерационные схемы, позволяющие при обработке экспериментальной информации существенно повысить точность определения характеристик изучаемых физических явлений. Поэтому огромное значение имеют разработка и изучение новых итерационных методов решения некорректных задач, получение условий их сходимости, нахождение оценок погрешности и обоснование применения к методам правил останова в процессе вычислений. Изложим некоторые факты из истории развития теории итерационных методов решения некорректных задач.



Теория линейных некорректных задач появилась в начале XIX в. как теория линейных интегральных уравнений I рода. Эти уравнения записываются в виде

$$\int_{\Omega} K(t, s)x(s)ds = f(t) \quad (t \in \Omega). \quad (1)$$

Здесь  $\Omega$  – некоторый интервал на прямой, или, более общо, некоторая область конечномерного пространства,  $x(s)$  – неизвестная функция, функция  $K(t, s)$  (ядро уравнения) – заданная функция двух переменных  $t, s \in \Omega$ ,  $f(t)$  – заданная функция. Первоначально такие уравнения рассматривались в предположении, что ядро  $K(t, s)$  непрерывно на  $\Omega \times \Omega$  за исключением диагонали  $\Delta = \{(s, s) : s \in \Omega\}$  и искались, естественно, при непрерывных  $f(t)$  непрерывные решения; дальнейшие результаты были получены в случае, когда  $K(t, s)$  интегрируемо с квадратом на  $\Omega \times \Omega$ , искались для функций  $f(t)$  с интегрируемым квадратом решения, также интегрируемые с квадратом.

Один из первых результатов об уравнении (1) был получен уже Н. Абелем, который нашел в случае  $\Omega = [0, T]$  и  $K(t, s) = \begin{cases} (t-s)^{-\Theta} & \text{при } 0 \leq s < t \leq T, \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < s \leq T, \end{cases}$

где  $\Theta \in [0, 1]$ , явное решение соответствующего уравнения. К началу XX в. явные формулы для решений были получены и для многих других уравнений с явно заданными ядрами.

В первой половине XX в. появилось несколько книг и учебников, посвященных линейным интегральным уравнениям. В них, помимо описания конкретных уравнений I рода, для которых решения были получены в явном виде, излагались и первые результаты, относящиеся к интегральным уравнениям I рода, ядра которых были на  $\Omega \times \Omega$  непрерывны и могли иметь на диагонали  $\Delta$  разрывы первого рода. Как оказалось, такие уравнения сводились к линейным интегральным уравнениям II рода

$$x(t) = \int_{\Omega} K(t, s)f(s)ds + f(t), \quad (t \in \Omega), \quad (2)$$

исследование которых оказалось существенно более простой задачей по сравнению с анализом линейных интегральных уравнений I рода. В частности, для интегральных уравнений II рода сначала с непрерывными ядрами (И. Фредгольм), а затем и интегрируемыми с квадратом ядрами (Т. Карлеман) были доказаны так называемые теоремы Фредгольма (геометрические аналоги классической теоремы Кронекера – Капелли о решениях произвольных систем линейных алгебраических уравнений). Описанный выше переход от уравнений I рода к уравнениям II рода осуществлялся двумя методами; первый из них основывался на дифференцировании один или несколько раз рассматриваемого уравнения по  $t$ , второй – на основе замены искомой функции  $x(t)$  ее первообразной первого или старшего порядков. Первый метод требовал дифференцируемости ядра  $K(t, s)$  по переменной  $t$ , второй – дифференцируемости ядра  $K(t, s)$  по переменной  $s$ . Следует сразу отметить, что оба описанных метода перехода от уравнений I рода к уравнениям II рода не являлись эквивалентными переходами; в частности, было выяснено, что аналоги теорем Фредгольма для линейных интегральных уравнений I рода неверны. Почти одновременно с вышеописанными методами перехода от уравнений I рода к уравнениям II рода были установлены и еще два фундаментальных результата, относящихся к линейным интегральным уравнениям I рода. Первый из них был полу-



чен Д. Гильбертом. Он показал, что в случае симметричности и непрерывности ядра  $K(t, s)$  ( $K(t, s) = K(s, t)$ ) левая часть уравнения (1) представима в виде

$$\int_{\Omega} K(t, s) f(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(t) \int_{\Omega} \psi_n(s) x(s) ds, \text{ где } \psi_n(t) (n = 1, 2, \dots) - \text{ортонормированная}$$

система собственных функций ядра  $K(t, s)$ ,  $\lambda_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – его собственные значения, причем ряд в правой части сходится в среднем квадратичном. Это представление позволяло выписать условия разрешимости и решения уравнения (1) с произвольной правой частью  $f(t)$  в явном виде. Условия разрешимости выписываются в следующем виде:

$$\int_{\Omega} \phi_n(s) f(s) ds = 0 (n \in \{n: \lambda_n = 0\}), \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n^2} \left| \int_{\Omega} \phi_n(s) f(s) ds \right|^2 < \infty, \quad (3)$$

а множество решений равенством

$$x(t) = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n} \int_{\Omega} \phi_n(s) f(s) ds \cdot \phi_n(t) + \sum_{\lambda_n = 0} c_n \phi_n(t), \quad (4)$$

здесь  $c_n$  ( $\lambda_n = 0$ ) – произвольные постоянные. Первое из условий (3) полностью аналогично условиям разрешимости в теоремах Фредгольма. Однако второе из условий (3) в случае, когда число ненулевых собственных значений  $\lambda_n$  бесконечно, является существенным ограничением на  $f(t)$  иного типа; обычно оно реализуется как некоторое свойство гладкости функции  $f(t)$ . Наличие этого (необходимого) условия разрешимости уравнения (1) и влечет за собой тот факт, что для уравнений I рода теоремы Фредгольма неверны. Далее, Т. Карлеман установил справедливость теорем Гильберта и для симметричных ядер  $K(t, s)$ , интегрируемых с квадратом.

Несколько позднее Э. Шмидт фактически распространил утверждения теорем Гильберта – Карлемана на непрерывные или симметричные ядра, не обладающие свойством симметрии. В этом более общем случае ядро  $K(t, s)$  представимо в виде

$$\int_{\Omega} K(t, s) f(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \psi_n(t) \int_{\Omega} \phi_n(s) x(s) ds,$$

здесь  $\phi_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – ортонормированная система собственных функций ядра  $K^* K(t, s) = \int_{\Omega} K(\xi, t) K(\xi, s) d\xi$ ,  $\psi_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – ортонормированная система функций

ядра  $K K^*(t, s) = \int_{\Omega} K(t, \xi) K(s, \xi) d\xi$ ,  $\mu_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) – собственные значения этих ядер (числа Шмидта ядра  $K(t, s)$ ), причём ряд в правой части также сходится в среднем квадратичном. Условия разрешимости теперь записываются в виде

$$\int_{\Omega} \psi_n(s) f(s) ds = 0 (n \in \{n: \lambda_n = 0\}), \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n^2} \left| \int_{\Omega} \phi_n(s) f(s) ds \right|^2 < \infty, \quad (5)$$



а формула для решения – в виде

$$x(t) = \sum_{\lambda_n \neq 0} \frac{1}{\lambda_n} \int_{\Omega} \psi_n(s) f(s) ds \cdot \phi_n(t) + \sum_{\lambda_n = 0} c_n \phi_n(t), \quad (6)$$

где снова  $c_n (\lambda_n = 0)$  – произвольные постоянные.

Описанные утверждения являются классическими и вошли почти во все курсы по теории интегральных уравнений. Их наиболее полное изложение содержится в [1–3]. Последующие работы в указанных направлениях не носили принципиального характера.

2. Как было отмечено в разделе 1, для линейных интегральных уравнений I рода теоремы Фредгольма неверны. Более того, в условиях разрешимости таких уравнений помимо равенств, накладываемых на правые части этих уравнений, фигурируют принципиально иные требования: сходимость некоторых рядов, построенных по этим правым частям, гладкость этих правых частей и др. Анализ же формул для решений этих уравнений обнаруживает еще одно неприятное явление: малым изменениям правых частей соответствуют, вообще говоря, сколь угодно большие изменения соответствующих решений. Именно это явление дало основание линейные интегральные уравнения I рода и задачи, сводимые к ним, называть *некорректными*.

Естественно, возникает вопрос о выяснении причин столь различных свойств у линейных интегральных уравнений I и II родов.

В начале XX в. возникла абстрактная схема исследования линейных задач. Эта схема основывалась на переходе от рассматриваемой задачи к операторному уравнению

$$Ax = y \quad (7)$$

с непрерывным линейным оператором  $A$ , действующим между подходящими банаховыми пространствами  $X$  и  $Y$ . Операторное уравнение (1) как частный случай содержит прежде всего системы линейных алгебраических уравнений. Однако оно в той же степени позволяет рассматривать и краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, линейные интегральные уравнения различных типов и многие другие задачи.

Естественно, при анализе уравнения (1) в первую очередь возникал вопрос о том, какие именно свойства оператора  $A$  определяют, будет ли уравнение вести себя «хорошо», т. е. будут ли малым изменениям его правой части  $y \in Y$  соответствовать малые изменения соответствующих решений  $x \in X$ , или это уравнение является некорректным, т. е. при малых изменениях правых частей  $y \in Y$  соответствующие решения  $x \in X$  будут «прыгать» сколь угодно далеко или вовсе «исчезать». Несколько иначе этот вопрос можно сформулировать так: для каких операторов  $A$  свойства уравнения (1) будут вполне аналогичны свойствам систем линейных алгебраических уравнений и для каких  $A$  эти свойства будут совершенно иными.

Как было выяснено Ф. Хаусдорфом и затем С. Банахом, основные теоремы в теории систем линейных алгебраических уравнений – теорема Кронекера – Капелли – или ее геометрическая форма – теоремы Фредгольма – верны и в бесконечномерном случае лишь при дополнительном предположении, что оператор  $A$  имеет замкнутую область значений (такие операторы получили название *нормально разрешимых*). Точнее, в их работах была установлена эквивалентность следующих утверждений:

(1) Область значений оператора  $A$  на пространстве  $X$  является замкнутым подпространством пространства  $Y$ .



(2) Уравнение (1) разрешимо в том и только том случае, когда на его правой части у аннулируются все решения  $y^* \in Y^*$  однородного уравнения

$$A^*y^* = 0 \quad (8)$$

с сопряженным к  $A$  действующим из  $Y^*$  в  $X^*$  оператором  $A^*$  (здесь  $X^*$  и  $Y^*$  – сопряженные или дуальные пространства к пространствам  $X$  и  $Y$ ).

(3) Для оператора  $A$  справедливо неравенство

$$\inf \{ \|x\| : Ax = y \} \leq L \|y\|. \quad (9)$$

где  $L$  – некоторая постоянная.

Было также доказано, что аналоги этих эквивалентных утверждений верны и для пары уравнений

$$A^*y^* = x^*, Ax = 0. \quad (10)$$

В частности, установлено, что оператор  $A$  является нормально разрешимым в том и только том случае, когда нормально разрешим оператор  $A^*$ .

Важным фактом теории систем линейных алгебраических уравнений является существование для соответствующего линейного оператора  $A$  квазиобратных операторов  $B$ . Так называются операторы  $B$ , для которых справедливо равенство  $ABA = A$ . Смысл этого определения заключается в справедливости следующего утверждения: *если уравнение  $Ax = y$  имеет решение, то  $x = By$  является одним из решений этого уравнения*. Частными случаями квазиобратных операторов  $B$  являются обычные левые обратные операторы ( $BA = I$ ), правые квазиобратные операторы ( $AB = I$ ) и обычные обратные операторы ( $BA = I, AB = I$ ).

Справедливость теорем Фредгольма для уравнения (1) (за исключением случая, когда оба пространства  $X$  и  $Y$  являются гильбертовыми) является необходимым условием для существования квазиобратных операторов, однако в общем случае не достаточным. Известно следующее утверждение: *оператор  $A$  имеет квазиобратные в том и только том случае, когда подпространство нулей оператора и пространство значений оператора  $A$  являются дополняемыми подпространствами*. Более того, *если оператор  $B$  является квазиобратным для оператора  $A$ , то оператор  $I - BA$  является проектором на подпространство нулей оператора  $A$ , а оператор  $AB$  – оператором проектирования на множество значений оператора  $A$* . Операторы, имеющие квазиобратные, принято называть *расщепляемыми*.

Детальному изучению подверглись частные классы расщепляемых операторов  $A$ , когда одно из подпространств  $Ker A$  или  $Im A$  является конечномерным. Операторы  $A$ , для которых оба этих подпространства конечномерны, получили название *фредгольмовых* (или *нетеровых*); их теория полностью повторяет теорию систем линейных алгебраических уравнений.

Для операторов  $A$ , не являющихся нормально разрешимыми, все перечисленные выше утверждения оказываются неверными. Более того, сформулированное выше свойство (3) по сути означает, что существует такая сходящаяся к нулю последовательность  $(y_n) \in Im A$ , для которой при любом выборе элементов  $x_n \in X$ , для которых  $Ax_n = y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) справедливо соотношение  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

В приложениях обычно в явном виде задается левая часть уравнения (7) (оператор  $A$ ) в виде некоторой аналитической формулы, а пространства  $X$  и  $Y$  выбираются



таким образом, чтобы этот оператор оказывался непрерывным линейным оператором между этими пространствами. Является ли при этом оператор  $A$  нормально разрешимым, зависит именно от выбора пространств  $X$  и  $Y$ . Более того, подбирая эти пространства, (почти) всегда можно добиться, чтобы уравнение (7) оказалось уравнением с нормально разрешимым оператором. Поэтому в течение первой половины XX в. в ситуации, когда возникало уравнение с ненормально разрешимым оператором, считалось, что соответствующая модель, описанная этим уравнением, не является корректной.

Однако выбор пространств  $X$  и  $Y$  часто диктуется иными соображениями. Среди них наиболее естественным кажется требование совпадения пространств  $X$  и  $Y$  ( $X = Y$ ), требование, чтобы пространства  $X$  и  $Y$  были достаточно простыми, а лучше – хорошо изученными, такими, как пространство  $C$  непрерывных функций или пространство  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) интегрируемых со степенью  $p$  при  $1 \leq p < \infty$  или ограниченных функций при  $p = \infty$ . Выбор таких пространств часто диктуется также самой рассматриваемой задачей. Тем самым во многих случаях операторное уравнение (7) приходится рассматривать с действующим и непрерывным из  $X$  в  $Y$  оператором  $A$ , не являющимся нормально разрешимым. И к середине XX в. была осознана необходимость построения общей теории линейных уравнений, не обладающих свойством корректности.

Изложенные выше результаты попали практически во все достаточно полные курсы функционального анализа. Здесь мы отметим курсы С. Банаха, Н. Данфорда – Дж. Т. Шварца, Р. Иосиды, Л. В. Канторовича – Г. П. Акилова, А. Н. Колмогорова – С. В. Фомина и Л. А. Люстерника – В. И. Соболева.

**3.** Важными частными случаями операторного уравнения (7) являются случаи, когда пространства  $X$  и  $Y$  совпадают ( $X = Y$ ) и когда оператор  $A$  представим в виде  $A = K$  или  $A = I - K$ , где  $K$  – невырожденный ( $Im K$  не является конечномерным подпространством  $X$ ) компактный линейный оператор. Именно к этому типу относятся линейные интегральные уравнения I рода в первом случае и линейные интегральные уравнения II рода – во втором. Это послужило основной причиной для детального изучения обоих случаев.

Основные результаты здесь были получены Ф. Риссом и Ю. Шаудером. Они установили, что в случае  $A = K$  этот оператор обязательно не является нормально разрешимым, а в случае  $A = I - K$  он будет не только разрешимым, но и фредгольмовым, для которого  $dim Ker (I - A) = codim Im (I - A)$ . Именно эти результаты и являются объяснением столь различных свойств линейных интегральных уравнений I и II рода.

Позднее результаты Ф. Рисса и Ю. Шаудера были распространены и на другие классы операторных уравнений (в частности, на случай, когда  $A = I - K$  с оператором  $K$ , для которого некоторая степень является компактным оператором). Методы Ф. Рисса и Ю. Шаудера были распространены также на произвольные фредгольмовы операторы. Систематическое изложение этих результатов приведено в [4–5].

**4.** Изложенные в разделах 2–3 общие теоремы о линейных операторах объяснили причины, обуславливающие «плохое» поведение некорректных линейных уравнений, однако мало что добавляли в задаче о реальном построении решений таких уравнений.

Между тем попытки разработать разнообразные приближенные методы построения решений уравнения (7) с оператором  $A$  неоднократно предпринимались. Так, Э. Пикар рассматривал непрерывные решения интегральных уравнений (1) с ядрами, допускающими представление  $K(t, s) = K_0(t, s) + h(t, s)$ , в котором ядро  $K_0(t, s)$  обладало тем свойством, что линейный интегральный оператор



$$K_0 x(t) = \int_{\Omega} K_0(t, s) x(s) ds \quad (11)$$

допускал аналитическое обращение  $K_0^{-1}$  (в частности, он рассматривал представления (11) с  $K_0(t, s) = K(s, s)$  или  $K_0(t, s) = K(t, t)$ ). Далее, вместо уравнения (1) фактически рассматривалось операторное уравнение

$$x(t) = -K_0^{-1} Hx(t) + K_0^{-1} f(t) \left( Hx(t) = \int_{\Omega} h(t, s) x(s) ds \right), \quad (12)$$

решения которого строились методом последовательных приближений

$$x_{n+1}(t) = -K_0^{-1} Hx_n(t) + K_0^{-1} f(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Отметим еще раз, что переход от уравнения (11) к уравнению (12) не является эквивалентным, а для произвольной непрерывной функции  $f(t)$  функция  $K_0^{-1} f(t)$ , вообще говоря, не определена.

Метод последовательных приближений решения линейных интегральных уравнений систематически изучался в течение всей первой половины XX в., однако в основном для уравнений II рода (2). В абстрактном виде он применяется к уравнениям (7) вида

$$x = Bx + f, \quad (14)$$

с действующим в банаховом пространстве  $X$  непрерывным линейным оператором  $B$ ; последовательные приближения записывается в виде

$$x_{n+1} = Bx_n + f \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (15)$$

или в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^n B_k f \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ясно, что вопрос о сходимости приближений (15) сводится к вопросу о сходимости операторного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ . Общим итогом проведенных исследований явился сле-

дующий абстрактный результат: ряд Неймана  $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$  сходится (в норме пространства

$L(X)$  действующих в  $X$  операторов) в том и только том случае, когда справедливо неравенство

$$\rho(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} < 1, \quad (16)$$



предел в этом неравенстве всегда существует и получил название *спектрального радиуса оператора  $B$*  (см. [6]).

Долгое время этот результат считался необходимым и достаточным условием сходимости последовательных приближений (15). Однако это утверждение оказалось неверным. В работе В. М. Фридмана [7] было установлено, что для уравнения (1), ядро которого определяет положительно определенный и самосопряженный оператор  $A$ , последовательные приближения

$$x_{n+1} = x_n + \mu(y - Ax_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

с любым начальным условием  $x_0$  сходятся при условии  $0 < \mu < \frac{2}{\|A\|}$ . Эти последовательные приближения могут быть записаны в виде (15) с оператором

$$B = I - \mu A, \quad f = \mu y. \quad (18)$$

При условии  $0 < \mu < \frac{2}{\|A\|}$  для оператора  $B$  справедливо равенство  $\rho(B) = 1$ . При этом ряд

Неймана  $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$  не сходится по норме пространства  $L(X)$  действующих в  $X$  операторов,

однако он сходится сильно!

Результаты работы В. М. Фридмана были существенно развиты в работе Г. Н. Положего [8]. В частности, в этой работе рассматривался случай, когда ядро  $K(t, s)$  не обладало свойством симметричности, но порождало компактный линейный оператор  $K$ . В этом случае уравнение (7) заменялось уравнением

$$A^*Ax = A^*f, \quad (19)$$

а последовательные приближения (17) заменялись приближениями

$$x_{n+1} = x_n + \mu(A^*y - A^*Ax_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (20)$$

Эти результаты, по существу не были новыми, т. к. приближения (20) являются приближениями (17), в которых оператор  $A$  заменен положительно определенным и самосопряженным оператором  $A^*A$ .

Результаты В. М. Фридмана были распространены на произвольные положительно определенные и самосопряженные операторы в работе Н. Vialy [9].

В 1961 г. М. А. Красносельский для самосопряженных операторов  $B$  с  $\rho(B) = 1$  получил окончательный результат: *для самосопряженного оператора  $B$  последовательные приближения (15) сходятся при любом начальном условии  $x_0$  к одному из решений уравнения (14) при условии, что для оператора  $B$  число  $-1$  не является собственным значением.* Теорема М. А. Красносельского позволяет существенно усилить результаты В. М. Фридмана, Н. Vialy и Г. Н. Положего.

Дальнейшие результаты по сходимости последовательных приближений (17) в критическом случае, когда для оператора  $B$  выполняется равенство  $\rho(B) = 1$ , были получены в работе J. J. Koliha [10]. Он исследовал общий случай, когда оператор  $B$  действует в произвольном банаховом пространстве  $X$ . Основной его результат следующий:



последовательные приближения (17) для такого оператора сходятся сильно при любом начальном условии  $x_0$  в том и только том случае, когда выполнены условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n x\| = 0 \quad (x \in E), \quad (I - B)X = X. \quad (21)$$

В работе [11] был приведен ряд уточнений этой теоремы. В частности, для общего случая, когда хотя бы одно из условий (21) не выполнено, там были описаны множества начальных условий  $x_0$  и правых частей  $f$ , для которых последовательные приближения (17) сходятся.

Нужно отметить также монографию [12], в которой изучались так называемые корректные операторы, класс которых, по существу, оказался совпадающим с операторами, удовлетворяющим условиям J. J. Koliha (21).

Результаты, описанные в этом разделе, обладают одним существенным недостатком. Формально они описывают условия сильной сходимости последовательных приближений к точным решениям уравнений с операторами, не обладающими свойством нормальной разрешимости, или, иными словами, для некорректных линейных уравнений. Однако эта сходимость в определенном смысле не является устойчивой. При реальных вычислениях этих последовательных приближений на каждом шаге делаются малые ошибки. В некритическом случае ( $\rho(B) < 1$ ) эти ошибки не влияют на сходимость и не накапливаются в процессе вычислений. В критическом же случае ( $\rho(B) = 1$ ) эти ошибки не только «сбивают» эту сходимость, но и накапливаются; последнее означает, что при реальных вычислениях последовательные приближения (15) к решениям уравнения (14) не сходятся. Описанный недостаток теорем этого раздела, по-видимому, явился основной причиной того, что эти результаты оказались сравнительно малоизвестными и дальнейшего развития практически не получили.

**5.** К середине XX в. стало ясно, что исследование некорректных линейных уравнений является важной задачей прежде всего в связи с тем, что многие практические задачи при переходе к операторному уравнению (7) приводили к ситуациям, когда соответствующий линейный оператор  $A$  оказывался не нормально разрешимым, а пространства  $X$  и  $Y$  в этих задачах (чаще всего это было пространство  $C$  непрерывных функций) менять было нельзя. Революционный шаг в изучении некорректных линейных задач был сделан в 1943 г. советским академиком А. Н. Тихоновым [13].

А. Н. Тихонов сначала ограничился простейшим случаем, когда ядро оператора  $A$  нулевое, а область его значений – плотное в  $Y$  подпространство. В этом случае уравнение (7) с фиксированным  $y_0 \in Y$  может быть как разрешимым, так и неразрешимым. Однако при любом  $\delta > 0$  для некоторых  $y \in B(y_0, \delta)$  ( $B(y_0, \delta)$  – шар с центром в точке  $y_0$  радиуса  $\delta$ ) – это уравнение обязательно разрешимо. И тем самым прообраз  $A^{-1}B(y_0, \delta)$  шара является обязательно непустым замкнутым выпуклым множеством; эти прообразы  $A^{-1}B(y_0, \delta)$  убывают вместе с  $\delta$ , а при  $\delta \rightarrow \infty$  «стягиваются» к решению (если оно существует) уравнения (7) с  $y = y_0$  или к пустому множеству (если решение отсутствует). Опираясь на этот факт, А. Н. Тихонов предложил вместо точного решения  $x_0$  уравнения (7) искать какое-либо решение  $x \in A^{-1}B(y_0, \delta)$  уравнения (7) с  $y \in B(y_0, \delta)$  при некотором фиксированном ненулевом  $\delta$ ; такие решения для некоторых  $y \in B(y_0, \delta)$  всегда существуют! Особенно эффективным такой подход оказался в случаях, когда для решений уравнения (7) может быть получена априорная оценка об их принадлежности к некото-



рому множеству  $M \subset X$ , обладающему «хорошими» свойствами (ограниченность, компактность, слабая компактность и др.)

Сам А. Н. Тихонов реализовал предложенную схему для уравнений (7) с оператором  $A: X \rightarrow Y$  между гильбертовыми пространствами  $X$  и  $Y$  следующим образом. Уравнение (7) с  $y = y_0$  очевидным образом эквивалентно задаче о наименьшем значении функционала  $\varphi(x, y_0) = kAx - y_0k^2$  на всем пространстве  $X$ ; однако эта задача очевидным образом близка к задаче о наименьшем значении «возмущенного» или «сглаживающего» функционала  $\varphi^\varepsilon(x, y_0) = kAx - y_0k^2 + \varepsilon\Omega(x)$ , где  $\Omega(x) > 0$  – регуляризующий (стабилизирующий) функционал, область определения которого априорно содержит точные решения уравнения (1) с  $y \in B(y_0, \delta)$ . В построениях А. Н. Тихонова лебеговы множества  $\{x \in \{x : \Omega(x) \leq h\}, h > 0$  были компактами; число  $\varepsilon$  – неотрицательный и достаточно малый параметр. В этом случае им было показано, что элемент  $x_{\varepsilon, \delta}$ , минимизирующий функционал  $\varphi^{(\varepsilon, \delta)}(x, y_\delta)$  на одном из лебеговых множеств  $\Omega$ , сходятся к точному решению  $x_0$  уравнения (7) с  $y = y_0$  (в предположениях А. Н. Тихонова такое решение обяза-

тельно существует!), если  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\frac{\delta^2}{\varepsilon} \rightarrow 0$ . Им же был рассмотрен частный случай, когда решение  $x_0$  априори имело вид  $x_0 = A^*h_0, \|h_0\| \leq C_0$ ; в этом случае им были получены достаточно точные оценки близости между  $x_{\varepsilon, \delta}$  и  $x_0$ , а именно неравенство  $\|x_{\varepsilon, \delta} - x_0\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}} + h\sqrt{\varepsilon}$  ( $h$  выбрано так, что все возможные решения уравнения (7) с  $y = y_0$  лежат в лебеговом множестве  $\Omega(h)$ ).

В 1962 г. Д. Л. Филлипс (D. L. Phillips) [14] и В. К. Иванов [15] предложили удобную модификацию метода А. Н. Тихонова. Вместо описанного в методе регуляризации А. Н. Тихонова стабилизирующего функционала  $\varphi^\varepsilon(x, y)$  они предложили минимизировать функционал  $\Omega(x)$  при условии  $\rho(Ax, y) \leq \delta$ . Ими в предположении существования единственного решения  $x_0$  уравнения (7) с  $y = y_0$  было показано, что элементы  $x_{\varepsilon, \delta}$ , минимизирующие функционал  $\Omega(x)$  при условии  $\rho(Ax, y_\delta) \leq \varepsilon$ , сходятся к точному решению  $x_0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . В. К. Ивановым было введено важное понятие квазирешения уравнения (7): элемент  $x_0$  называется *квазирешением* уравнения (7) на множестве  $M$ , если он минимизирует функционал  $\rho(Ax, y)$  на этом множестве. В дальнейшем предложенные А. Н. Тихоновым, Д. Л. Филлипсом и В. К. Ивановым вариационные методы получили развитие в работах О. А. Лисковца, Я. В. Константиновой и др.

**6.** Существенный вклад в развитие теории некорректных задач внес М. М. Лаврентьев. В монографии [16] был предложен новый подход к исследованию некорректных задач, общая схема которого состояла в следующем: вместо исходного уравнения (1) рассматривалось уравнение

$$A_\varepsilon x = y_\delta, \quad (22)$$

где  $A_\varepsilon$  – оператор, который, с одной стороны, был бы близок к оператору  $A$ , а с другой стороны, уравнение  $A_\varepsilon x = y_\delta$  становилось уравнением с нормально разрешимым оператором; об  $y_\delta$  предполагалось, что  $y_\delta \in B(y, \delta)$ . В этом случае уравнение (22) определяет решение и возникает естественный вопрос, является ли оно близким к решению уравнения (7), если последнее имеет решение. Естественно пытаться получить оценку близости между точным решением (7) и решением  $x_{\varepsilon, \delta}$  уравнения (22) при малых  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Но, как оказывается, такие оценки можно получить лишь в исключительных случаях и, как правило, при жестких дополнительных ограничениях.



Сам М. М. Лаврентьев рассматривал случай, когда оператор  $A$  был положительно определенным самосопряженным, а оператор  $A_\varepsilon$  определялся равенством  $A_\varepsilon = \varepsilon I + A$ . Более того, им предполагалось, что правая часть  $y$  уравнения (7) была представима в виде  $y = Bz$ , где  $B$  – коммутирующий с  $A$  оператор. В таком случае возникал вопрос о близости между  $x_{\varepsilon, \delta}$  и точным решением  $x$  уравнения (7) в предположении, что  $y = Bz$ . Такая оценка М. М. Лаврентьевым была получена в виде

$$\|x_{\varepsilon, \delta} - x\| \leq \omega(\varepsilon) + \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad (23)$$

где  $\omega(\cdot)$  – некоторая построенная по операторам  $A$  и  $B$  функция, для которой  $\omega(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тем самым М. М. Лаврентьев обнаружил принципиально новое явление в поведении приближений  $x_{\varepsilon, \delta}$ . Коротко это явление может быть выражено следующими словами: при стремлении  $\varepsilon$  к нулю приближения  $x_{\varepsilon, \delta}$  сначала подходят достаточно близко к решению  $x$  уравнения (7), а затем начинают удаляться; при этом близость между соответствующими приближениями  $x_{\varepsilon, \delta}$  и точным решением  $x$  уравнения (7) стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Формально это свойство выражается равенством

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, \delta \varepsilon^{-1} \rightarrow 0} \|x_{\varepsilon, \delta} - x\| = 0.$$

В той же монографии М. М. Лаврентьев рассмотрел и случай уравнения (7) с произвольным оператором  $A$  в гильбертовом пространстве. Уравнение (7) сводилось стандартным способом к уравнению

$$A^*Ax = A^*f \quad (24)$$

уже с положительно определенным самосопряженным оператором, и затем в предположении перестановочности операторов  $A^*A$  и  $B$  им была получена аналогичная оценка:

$$\|x_{\varepsilon, \delta} - x\| \leq \omega(\sqrt{\varepsilon}) + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (25)$$

Наконец, в той же монографии для уравнения (7) был рассмотрен и итерационный метод

$$x_{n+1, \delta} = x_{n, \delta} - (Ax_{n, \delta} - f_\delta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

для приближенного решения уравнения (7) с положительно определенным самосопряженным оператором  $A$  и приближенно заданной правой частью  $f_\delta$  ( $f_\delta \in B(f, \delta)$ ). При тех же предположениях им была показана оценка

$$\|x_{n, \delta} - x\| \leq \omega\left(\frac{1}{n+1}\right) + n\delta. \quad (27)$$

Здесь снова  $\omega(\cdot)$  – определенная по операторам  $A$  и  $B$  функция, для которой  $\omega(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow 0$ . Неравенство (27) показывает, что приближения  $x_{n, \delta}$  при увеличении  $n$  сначала приближаются к точному решению, а затем от него удаляются; при этом близость «близких» к точному решению  $x$  приближений  $x_{n, \delta}$  стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Коротко это явление может быть выражено следующим равенством:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n\delta \rightarrow 0} \|x_{n, \delta} - x\| = 0. \quad (28)$$



Описанную ситуацию можно также выразить равенством

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \min_{n \leq v < \infty} \|x_{v,\varepsilon} - x\| \right) \right) = 0. \quad (29)$$

Для уравнения (24) соответствующий итерационному методу (26) метод последовательных приближений записывается в виде

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - (A^*Ax_{n,\delta} - A^*f_\delta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (30)$$

для него М. М. Лаврентьев также получил аналог неравенств (27). Автором была обоснована сходимость предложенного метода последовательных приближений для некоторых классов нелинейных операторных уравнений.

При других предположениях метод простой итерации был исследован Ю. Т. Антохиным [17]. Здесь рассматривается уравнение  $Ax = f$  в гильбертовом пространстве,  $A = A^*$  – линейный, неограниченный оператор, со всюду плотной областью определения  $D(A)$ . Для оператора нуль служит точкой его же спектра, но в то же время не является собственным значением, т. е. существует последовательность  $\{x_n\}$  такая, что  $\|x_n\| = 1$ ,  $\|Ax_n\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  и  $Ax_n \neq 0$  при  $x \neq 0$ . В дальнейшем предполагается, что решение уравнения существует. Предложенная здесь схема явного метода последовательных приближений выглядит так:  $x_1 = f$ ,  $x_n = \left(E - \frac{1}{n}A\right)x_{n-1} + \frac{1}{n}f$ . Для данного метода при

условии, что оператор  $A = A^* > 0$ , доказана сходимость  $\|R_n\|^2 = \|x - x_n\|^2 \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$

и получена оценка погрешности  $\|R_n\|^2 = \int_0^{\|A\|} |r_n(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) \leq \int_0^\varepsilon d(E_\lambda x, x) +$

$$\left( \frac{K_1^2}{n^{2\varepsilon}} + \frac{1}{(n!)^2} \right) K^2, \quad \text{где } \forall \varepsilon \in (0,1): \quad |r_n| \leq 1 \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq \varepsilon; \quad |r_n| \leq K_1(\varepsilon)/n^\varepsilon$$

при  $\varepsilon \leq \lambda \leq n+1-\varepsilon$ ;  $|r_n| \leq \lambda^n/n!$  при  $n < \lambda$ , и в предположении, что  $f \in D(A^n)$ ,  $n=1,2,\dots$ , причем  $\|A^n f\| \leq K$  ( $K \neq K(n)$ ) и  $\|x\| \leq K$ .

А. С. Апарциным [18] в гильбертовом пространстве  $H$  решается уравнение I рода  $A\varphi = f$  с положительным самосопряженным вполне непрерывным оператором  $A$ . Предполагается, что уравнение разрешимо. Пусть  $\bar{\varphi}$  – нормальное решение, т. е. решение с минимальной нормой (случай неединственного решения рассматриваемого операторного уравнения). Хорошо известно, что задача нахождения  $\bar{\varphi}$  некорректна.

В настоящей работе рассматривается явная итерационная процедура вида  $\phi_{n+1,\alpha_{n+1}} = [(1-\mu\alpha_n)E - \mu A]\phi_{n,\alpha_n} + \mu f$ ,  $\phi_{0,\alpha_0} = \mu f$ , которая является дискретным аналогом линейного дифференциального уравнения  $\frac{dW(t)}{dt} + [\alpha(t)E + A]W(t) = f$ , где  $W(t_0) = W_0 \in H$ ,  $\alpha(t)$  – положительная монотонно убывающая функция при  $t \geq t_0$



и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$ . Доказана сходимость метода при условии

$$0 < \mu < \frac{2}{\alpha_n + \|A\|}, \quad n = 0, 1, 2, \dots (A: H \rightarrow H).$$

Также доказана сходимость предложенной процедуры при приближенной правой части уравнения и при условии, когда оператор  $A$  заменяют некоторым более удобным для вычислений «приближенным оператором» (если  $A$  – интегральный оператор, то его заменяют квадратурной формулой).

А. В. Крянев [19] решает линейное уравнение  $Ax = y$ , где  $A: H \rightarrow H$  – ограниченный, самосопряженный, линейный и неотрицательный оператор. Если  $A$  – вполне непрерывный, то  $A(H) \neq H$  (задача некорректна, так как не для всех  $y \in H$  разрешима). Рассмотрен случай неединственного решения данного уравнения. Вводится  $B: H \rightarrow H$  – ограниченный, самосопряженный, линейный и положительно определенный оператор, для которого  $M_B = \sup_{\|x\|=1} (Bx, x)$ ,  $m_B = \inf_{\|x\|=1} (Bx, x) > 0$  и  $M_A = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$ . При сделан-

ных предположениях определен оператор  $C = (A + B)^{-1}B$ , спектральный радиус которого, очевидно, равен 1. Для решения линейного уравнения автор предлагает неявный итерационный процесс  $Ax_n + Bx_n = Bx_{n-1} + f$ , который можно переписать в эквивалентной форме:  $x_n = Cx_{n-1} + (A + B)^{-1}f$ . Доказана сходимость метода при точной и приближенной правой части уравнения. Рассмотрен случай суммарных возмущений оператора и правой части уравнения:  $\Delta A$  и  $\Delta f$ , получена оценка погрешности

$$\|x - x_n\| \leq M_0(n) + \delta \frac{q^n - 1}{(q - 1)m_B} \left[ MqN_0 + \frac{MN}{m_B} + 1 + O(\delta) \right],$$

где  $\|C\| = q$ ,  $\|\Delta A\| \leq M\delta$ ,  $\|\Delta f\| \leq \delta$ ,  $\|f\| \leq N$ ,  $0 \leq M_0(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $0 \leq O(\delta) \leq C_0\delta$  ( $C_0 \geq 0$ ,  $C_0 \neq C_0(\delta)$ ),  $\|(A + B)^{-1}\Delta A\| < 1$ .

Здесь решен следующий численный пример. Ищется решение интегрального уравнения Фредгольма I рода

$$\int_{-3}^3 K(t-s)x(s)ds = f(t), \quad |t| \leq 3, \quad \text{где } K(z) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi z/3), & |z| \leq 3, \\ 0, & |z| > 3. \end{cases}$$

Была взята такая функция  $f(t)$ , которой соответствует решение  $x(t) = K(t)$ . Интеграл заменялся квадратурной формулой по правилу Симпсона (число точек разбиения  $m = 29$ ). В качестве матрицы  $B$  бралась трехдиагональная (формата  $29 \times 29$ ) матрица  $(b_{ij})$ :  $b_{ii} = 2, i = \overline{1, 29}$ ,  $b_{i, i-1} = b_{i-1, i} = -1, i = \overline{2, 29}$ . Сначала рассматривается итерационная схема  $Ax_n + \varepsilon Bx_n = \varepsilon Bx_{n-1} + f$ ,  $\varepsilon > 0$ , где  $A + \varepsilon B$  – положительно определенная симметричная матрица формата  $m \times m$  ( $A, B$  – положительно определенные симметричные матрицы формата  $m \times m$ , но  $A$  – плохо обусловленная), которая при достаточно больших  $\varepsilon > 0$  – хорошо обусловленная. Представляется  $A + \varepsilon B = C^T C$ ,



где  $C$  – верхняя треугольная матрица, и предложенная схема заменяется более удобной  $C^T Cx_n = \varepsilon Bx_{n-1} + f$ ,  $\varepsilon > 0$ , которой и решается рассмотренный численный пример.

В. М. Фридман в статье [20] для решения в гильбертовом пространстве уравнения I рода  $Lx = Ax - y = 0$  с линейным ограниченным оператором  $A$  предлагает итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|Lx_n\|^2}{\|A^* Lx_n\|^2} A^* Lx_n.$$

С использованием интегрального представления оператора  $A^* A$  рассмотрен случай неединственного решения уравнения (рассматриваемая задача некорректна) и доказана сходимость предлагаемого метода:  $x_n \rightarrow Px_0 + u$ , где  $x_0 \in H$  – начальное приближение,  $u$  – единственное решение уравнения,  $P$  – оператор проектирования на подпространство нулей оператора  $A$ .

В. Н. Страховым [21] в гильбертовом пространстве  $H$  решается уравнение I рода  $f = (E - T)\varphi$ , где оператор  $T = T^* \geq 0$  и  $\|T\| = 1$ ,  $1 \in S_T$ ,  $f \in R(E - T)$ . Для решения уравнения предлагается итерационная схема  $\varphi_n = T\varphi_{n-1} + f$ , из которой следует

$\varphi - \varphi_n = T^n(\varphi - \varphi_0)$ . С помощью интегрального представления положительного самосопряженного оператора  $T$  получено:  $\|\varphi - \varphi_n\|^2 = \int_0^1 \mu^{2n} d(E_\mu(\varphi - \varphi_0), \varphi - \varphi_0)$ . Доказана

сходимость метода, и для получения оценки погрешности  $\left(\|\varphi - \varphi_n\| = O\left(\frac{1}{n^x}\right)\right)$  использовалось предположение об истокорпредставимости точного решения, т. е. что  $\varphi \in R((E - T)^x)$ ,  $x > 0$ .

В работе [22] В. Н. Страхов решает операторное уравнение I рода  $A\varphi = f$  ( $\|A^{-1}\| = +\infty$ ) методом итераций  $\varphi_0 = f_0$ ,  $\varphi_n = (E - A)\varphi_{n-1} + f$ , потребовав  $\|E - A\| = 1$ . Автором используется начальное приближение:  $\varphi_0 = f_0$ , где  $f_0$  – произвольная функция из гильбертова пространства  $H = L_2(-\infty, +\infty)$ . В работе доказана сходимость метода  $\|\varphi_n - \varphi\| = \|(E - A)^n(\varphi_0 - \varphi)\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Оценка погрешности метода не получена.

Наиболее подробно априорный выбор числа итераций для метода простой итерации Ландвебера [7–9; 16; 23–33]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0 \quad (31)$$

изучен О. А. Лисковцом, Я. В. Константиновой [34]. Здесь авторами показано, что метод простой итерации сходится к точному решению уравнения  $Ax = y_\delta$  ( $A: H \rightarrow H$  – положительный ограниченный самосопряженный оператор) при условии  $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$ , если ограничиться числом итераций  $n = n(\delta)$ , зависящим от  $\delta$  так, чтобы  $n(\delta)\delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . При условии  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$  и в предположении, что точное решение



истокопредставимо, т. е.  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ , получена справедливая при всех  $n \geq 1$  оценка погрешности  $\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s (n\alpha e)^{-s} \|z\| + n\alpha\delta$ . Полученная оценка оптимизирована по  $n$ .

Для этого при заданном  $\delta$  найдено такое значение числа итераций  $n$ , при котором оценка погрешности становится минимальной. Оптимальная оценка погрешности

для явного метода итераций (31) имеет вид  $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (s+1)e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$

и получается при  $n_{\text{опт}} = \lceil s\alpha^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} \rceil$ . Очевидно, что для уменьшения  $n_{\text{опт}}$  (здесь и далее  $n_{\text{опт}}$  есть целое число) и, следовательно, числа итераций для получения решения  $x$  уравнения необходимо выбирать параметр  $\alpha$  возможно большим из условия  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ . Также для итерационной процедуры получена погрешность в счете

и изучен случай приближенно заданного оператора  $A_h : \|A_h - A\| \leq h$ .

С учетом погрешности в операторе получена оценка погрешности метода  $\|x - y_{n,\delta}\| \leq s^s (n\alpha e)^{-s} \|z\| + n\alpha\delta + \left( (1 + \alpha h)^n - n\alpha h - 1 \right) h^{-1} \|y_\delta\|$ , принимающая оптимальный для задач этого класса порядок  $\|y_{n,\delta} - x\| = O\left( (\delta + h)^{s/(s+1)} \right)$ , если  $n \underset{\cap}{\cup} (\delta + h)^{-1/(s+1)}$ .

В [9] Н. Vialy решает уравнение I рода  $Ax = y$ , где  $H$  – полное, сепарабельное гильбертово пространство,  $A : H \rightarrow H$  – линейный ограниченный положительный оператор,  $0$  является его собственным значением (решение уравнения неединственно). Для решения рассматриваемого уравнения используется итеративная схема

$$x_n = x_{n-1} + \tau(y - Ax_{n-1}), \quad x_0 \in H, \quad 0 < \tau < \frac{2}{\|A\|}.$$

Доказана сходимость метода в случае неединственного решения. Автором рассматриваются обобщения метода простой итерации:

$$x_n = x_{n-1} + T(y - Ax_{n-1}), \quad x_0 \in H, \quad T : H \rightarrow H, \quad T = \tau A^*, \quad 0 < \tau < \frac{2}{\|A\|^2};$$

и в случае, когда  $A$  – эрмитов оператор ( $A \neq \emptyset$ ,  $A = A^*$  и  $\forall x \in H (Ax, x) \geq 0$ ),

$$x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1} \tau(y - Ax_{n-1}), \quad x_0 \in H, \quad 0 < \tau < \frac{\sqrt{2}}{\|A\|}.$$

Для всех приведенных схем автор доказывает сходимость в случае неединственного решения.

Впервые В. Ф. Савчуком и О. А. Лисковцом [29] при условии  $0 < \alpha < 2\|A\|^{-1}$  доказана сходимость метода простой итерации (31) в энергетической норме гильбертова



пространства:  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ , где  $x \in H$ . Для получения оценок погрешности не потребовалось сведений об истокорпредставимости точного решения. Переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокорпредставимости порядка  $s = 1/2$  для точного решения. Полученная оценка оптимизирована по  $n$  и найдено  $n_{\text{опт}}$ :

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq (35/27)^{1/4} (2\delta\|x\|)^{1/2} e^{-1/4}, n_{\text{опт}} = (35/27)^{-1/2} \alpha^{-1} e^{-1/2} \delta^{-1} \|x\|.$$

Работы О. А. Лисковца, Я. В. Константиновой [35] посвящены решению в гильбертовом пространстве  $H$  уравнения  $Ax = y$  с положительным ограниченным самосопряженным оператором  $A$ .  $0 \in S_A$ , но нуль не является собственным значением оператора. Предполагается существование единственного решения уравнения. Для его отыскания строится градиентный метод итерации с переменным шагом  $x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y)$ ,  $x_0 = 0$ . При условиях

$$0 < \alpha_i < \frac{2}{\|A\|}, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \quad (32)$$

доказана сходимость предложенного метода при точной правой части уравнения. В случае, когда правая часть уравнения известна приближенно  $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$ , метод сходится при условиях (32) и если  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . В предположении, что точное решение  $x$  истокорпредставимо и при условии  $0 < \alpha_i \leq \frac{r(c_i)}{\|A\|}$

(где  $r(c)$  – единственный корень уравнения  $r = 1 + \left(\frac{c}{er}\right)^c$ ,  $c > 0$ ) получена общая оценка погрешности в случае приближенного оператора ( $\|A - A_h\| \leq h$ ):

$$\|x - y_{n,\delta}\| \leq s^s (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^{-s} e^{-s} \|z\| + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\delta + \\ + ((1 + \alpha_1 h)(1 + \alpha_2 h) \dots (1 + \alpha_n h) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)h - 1)h^{-1} \|y_\delta\|.$$

В статье [36] Я. В. Константиновой в случае, когда правая часть уравнения  $Ax = y_\delta$  задана приближенно, строится регуляризатор в виде неявного итерационного процесса  $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x_{0,\delta} = 0$ . Здесь доказывается сходимость предложенного метода, но не получена эффективная оценка погрешности.

В [37] целая глава (автор О. А. Лисковец) посвящена некорректным задачам и методам их решений. Здесь для решения операторного уравнения I рода  $Ax = y_\delta$  предлагаются вариационные методы решения (метод квазирешений Иванова, метод тихоновской регуляризации, метод и принцип невязки Филлипса и Иванова), обобщенное суммирование рядов, конечноразностный метод и метод итераций. Даются определения корректности задачи по Адамару и по Тихонову, определения регуляризующего алгоритма рассматриваемой задачи, формулируются достаточные условия сходимости предлагаемых методов. С помощью метода квазирешений, метода невязки, метода ре-



гуляризации и явного итерационного метода  $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + 9,6(y_\delta - Ax_{n,\delta})$ ,  $x_{0,\delta} = 0$  в гильбертовом пространстве  $L_2(0,1)$  решается модельная задача в виде уравнения

$\int_0^1 A(t,s) x(s) ds = y(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  с симметричным положительным ядром

$$A(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases} \text{ точной правой частью } y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12} \text{ и точным}$$

решением  $x(t) = t(1-t)$ . Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен.

Работа О. А. Лисковца [38] посвящена обзору основных результатов по рассматриваемой теме. Здесь подчеркивается, что для линейного уравнения  $Ax = y$  в гильбертовом пространстве  $H$  с самосопряженным оператором  $A = A^*$  некорректность задачи эквивалентна принадлежности значения  $\lambda = 0$  спектру оператора  $S_A$ , поэтому для решения уравнения оператор  $A$  можно заменить близким к нему оператором, спектр которого отделен от нуля. Эта идея была реализована многообразными способами. При положительном самосопряженном операторе  $A = A^* \geq 0$  к нему можно добавлять оператор  $\alpha E$ , где  $\alpha > 0$ , а  $E$  – тождественный оператор, сводя тем самым исходную задачу к уравнению (метод Лаврентьева)

$$Ax + \alpha x = y, \quad \alpha > 0, \quad (33)$$

при этом необходимым и достаточным для регуляризации является условие  $\delta = O(\alpha)$ , регуляризатором служит семейство линейных операторов  $R_\alpha = (A + \alpha E)^{-1}$ . При самосопряженном операторе  $A = A^*$  к нему можно добавлять оператор  $i\alpha E$ , где  $i$  – мнимая единица,  $\alpha$  – вещественное число, или оператор  $zE$  с комплексным  $z$ , не принадлежащим спектру  $S_A$ ; то же верно при симметричном замкнутом операторе. При общем линейном операторе к рассматриваемому уравнению после левой трансформации Гаусса (умножения слева на сопряженный  $A^*$ ) применяют метод (31), сводящийся в этом случае к уравнению  $A^*Ax + \alpha x = A^*y$ ,  $\alpha > 0$ ; регуляризатором теперь служит семейство  $R'_\alpha = (A^*A + \alpha E)^{-1} A^*$ .

Для решения преобразованного уравнения  $A^*Ax = A^*y_\delta$  в случае погрешности в операторе ( $\|A - A_h\| \leq h$ ) пригодны и нелинейные итерационные методы:

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \gamma_n A_h^* r_n, \quad r_n = A_h x_{n,\delta} - y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad \gamma_n = \gamma_n(\alpha) = \frac{\left( (A_h A_h^*)^\alpha r_n, r_n \right)}{\left( (A_h A_h^*)^{\alpha+1} r_n, r_n \right)},$$

называемые  $\alpha$ -методами. При  $\alpha \geq 1$  априорный выбор  $n = O((\delta + h)^{-2})$ , или выбор по невязке первого  $n$ , для которого  $\|r_n\| \leq b\delta + dh = \eta(\delta, h)$  с заданными числами  $b > 1$ ,  $d > \|x\|$  превращает эти методы в регуляризующие алгоритмы.

Работа [39] посвящена спурт-методу построения последовательных приближений. Решается линейное уравнение  $x = Ax + f$ , где  $A$  – самосопряженный положи-



тельно определенный оператор, действующий в конечномерном евклидовом пространстве  $R^k$ . В работе утверждается:

1) если  $\|A\| < 1$ , то последовательные приближения  $x_{n+1} = Ax_n + f$  сходятся к точному решению уравнения;

2) в случае, когда  $\|A\|$  близка к единице (здесь скорость приближений из 1) оказывается недостаточно быстрой) для ускорения сходимости при подсчете некоторых приближений лучше использовать итерационную процедуру  $x_{n+1} = [(1-c)E + cA]x_n + cf$ , где  $c$  – некоторый параметр, не зависящий от  $x_n$ .

В итоге авторами был предложен следующий алгоритм спурт-схемы. Полагают  $A_\alpha(x) = Ax + f$ ,  $A_\beta(x) = [(1-c)E + cA]x + cf$  и, выбирая  $0 < q < \|A\|$ , обозначают через  $r_n = x_n - Ax_n - f$  невязку. Выбрав какое-либо начальное приближение  $y_0$ , определяются последовательные приближения  $\{y_n\}$  следующим образом:

$$y_{n+1} = \begin{cases} A_\alpha(y_n), & \text{если либо } \|r_n\|/\|r_{n-1}\| < q, \text{ либо } y_n = A_\beta(y_{n-1}), \text{ либо } n = 0, \\ A_\beta(y_n), & \text{если } n > 0, \|r_n\|/\|r_{n-1}\| \geq q \text{ и } y_n = A_\alpha(y_{n-1}). \end{cases}$$

Приближения  $y_n$  называют  $\alpha$ -итерациями, если  $y_n = A_\alpha(y_{n-1})$ , и  $\beta$ -итерациями, если  $y_n = A_\beta(y_{n-1})$ . Из построения алгоритма следует, что первое вычисленное приближение –  $\alpha$ -итерация; после  $\beta$ -итерации всегда следует  $\alpha$ -итерация.

При условии  $\frac{2}{2-\|A\|} < c < \frac{2}{2-\|A\|-q}$  доказана сходимость предложенного алгоритма.

Показано, что метод сокращает объем вычислений по сравнению с методом простой итерации. Недостаток спурт-схемы – повышенная чувствительность к ошибкам округления.

В статье [26] И. В. Емелиным и М. А. Красносельским решается операторное уравнение  $Ax = f$ , где  $A: H \rightarrow H$  – ограниченный оператор. Известно, что  $0 \in S_A$ , но не является собственным значением оператора. Предполагается, что  $\|A\| \leq 1$ . Если уравнение разрешимо ( $f \in R(A)$ ), то применяется итерационный процесс  $y_{n+1} = y_n - A^*Ay_n + A^*\bar{f} + u_n$ , где  $\|f - \bar{f}\| \leq \delta$ ,  $\|u_n\| \leq \beta$  ( $u_n$  – ошибки вычисления итераций). В статье для решения уравнения используется останов по поправкам (по соседним приближениям):  $\begin{cases} \|y_n - y_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \\ \|y_m - y_{m+1}\| \leq \varepsilon. \end{cases}$  Здесь  $\varepsilon$  – уровень останова. Доказана

**Теорема 1.** Пусть  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ , тогда справедливы следующие утверждения:

а) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\beta$ , то момент останова  $m$  определен при любом начальном приближении  $y_0 \in H$  и любых  $\bar{f}$  и  $\{u_n\}$ , удовлетворяющих условиям  $\|f - \bar{f}\| \leq \delta$ ,  $\|u_n\| \leq \beta$ ;

б) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > \delta + 2\beta$ , то справедлива оценка  $m \leq \frac{\|y_0 - x^*\|^2}{(\varepsilon - \delta - 2\beta)(\varepsilon - \delta)}$ ;



в) если  $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$ ,  $\delta, \beta \rightarrow 0$  и при этом  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq c(\delta + \beta^p)$ , где  $c > 1$ ,  $p \in (0, 1)$ , то  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|y_m - x^*\| = 0$ .

Этими же авторами [27] при решении линейного уравнения  $Ax = f$ , где  $A: H \rightarrow H$  – ограниченный положительный самосопряженный оператор для метода простой итерации  $x_{n+1, \delta} = x_{n, \delta} - Ax_{n, \delta} + f_\delta$  обосновывается применение останова по невязке  $\|Ax_{n, \delta} - f_\delta\| > \varepsilon$ , ( $n < m$ ),  $\|Ax_{m, \delta} - f_\delta\| \leq \varepsilon$ . Доказана

**Теорема 2.** Пусть уровень останова  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  предлагаемого итерационного процесса удовлетворяет неравенству  $\varepsilon(\delta) > \delta$  и стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Тогда справедливо равенство  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|f - f_\delta\| \leq \delta} \|x_{m, \delta} - x\| = 0$ , где  $x_{m, \delta}$  – приближенное решение,

полученное предлагаемой процедурой с уровнем останова  $\varepsilon$ .

Недостаток – для рассматриваемого метода не получена оценка погрешности.

Г. М. Вайникко [40] получает оценки погрешности метода последовательных приближений при решении уравнений I рода с неточно заданными оператором и правой частью. Останов последовательных приближений осуществляется по невязке или по поправкам (по соседним приближениям). Подтверждаются результаты, что при останове по невязке автоматически делается нужное число итераций для получения оптимального по порядку результата, и при этом не нужно знать гладкости решения. Итак, автором решается уравнение

$$Au = f, \quad (34)$$

где  $A \in L(H_1, H_2)$  – линейный ограниченный оператор ( $A: H_1 \rightarrow H_2$ ). Область значений  $R(A) \subset H_2$  оператора  $A$ , вообще говоря, не замкнута (задача (1) некорректна, т. к. решение уравнения может не существовать), однако предполагается, что  $f \in R(A)$ . Уравнение (34) таким образом, разрешимо; решений может быть много, т. е. нулевое подпространство  $N(A) = \{u \in H_1 : Au = 0\}$ , вообще говоря, нетривиально.

Автор указывает, что в реальных задачах оператор  $A$  и элемент  $f$  известны лишь приближенно, вместо них в его распоряжении имеются некоторые приближения  $A_\eta \in L(H_1, H_2)$ ,  $f_\delta \in H_2$ , где

$$\|A_\eta - A\| \leq \eta, \quad \|f_\delta - f\| \leq \delta, \quad (35)$$

$$\|A\| \leq 1, \quad \|A_\eta\| \leq 1. \quad (36)$$

Условие (36) не ограничивает класса решаемых задач (31), так как выполнения (36) можно всегда достичь, умножив (34) на подходящую константу.

Для приближенного решения уравнения (34) автором строится итерационный процесс

$$u_n = (E - A_\eta^* A_\eta) u_{n-1} + A_\eta^* f_\delta, \quad (37)$$



где  $E$  – тождественный оператор,  $A_\eta^* \in L(H_1, H_2)$  – сопряженный к  $A_\eta$  оператор. Здесь уравнение

$$A_\eta^* A_\eta u = A_\eta^* f_\delta, \quad (38)$$

по которому строятся последовательные приближения (37) само может быть неразрешимым. Тем не менее, если итерации (37) остановить в подходящий момент, то соответствующее  $u_n$  будет близким к решению уравнения (34).

Автором предлагается вычислять итерации (37) до такого номера  $n$ , при котором норма невязки  $A_\eta u_n - f_\delta$  или норма поправки  $u_n - u_{n-1}$  достигнет заданного уровня малости. Здесь обозначается через  $u_*$  – нормальное решение (1) относительно  $u_0$  (начального приближения), т. е. решение, для которого норма  $\|u_* - u_0\|$  минимальна по сравнению с другими решениями. Автор предлагает следующие правила останова для (37):

**Правило останова (П. 0).** Зададим  $a_1 > 0$  и  $a_2 > 0$ ; итерации остановим на таком номере  $n = n(\delta, \eta)$ , для которого впервые  $\|u_n - u_{n-1}\| \leq a_1 \delta + a_2 \eta$ .

**Правило останова (П. 1).** Зададим  $b_1 > 1$  и  $b_* > \|u_*\|$ ; итерации остановим на таком номере  $n = n(\delta, \eta)$ , для которого впервые  $\|A_\eta u_n - f_\delta\| \leq b_1 \delta + b_* \eta$ .

**Правило останова (П. 2).** Зададим  $b_1 > 1$ ,  $b_2 > 1$  и  $a > 0$ ; итерации остановим на таком номере  $n = n(\delta, \eta)$ , для которого впервые будет выполнено хотя бы одно из неравенств  $\|A_\eta u_n - f_\delta\| \leq b_1 \delta + b_2 \|u_n\| \eta$ ,  $n \geq \frac{a}{(b_1 \delta + b_2 \|u_n\| \eta)^2}$ .

Доказаны

**Теорема 3.** Пусть итерации (37) останавливаются по любому из правил останова (П. 0), (П. 1), (П. 2). Тогда  $\|u_{n(\delta, \eta)} - u_*\| \rightarrow 0$  при  $\delta, \eta \rightarrow 0$ , при этом для  $n(\delta, \eta)$  в случае правила (П. 0) справедливо соотношение:  $(\delta + \eta)n(\delta, \eta) \rightarrow 0$  при  $\delta, \eta \rightarrow 0$ , а в случае правил останова (П. 1) и (П. 2) соотношение:  $(\delta + \eta)^2 n(\delta, \eta) \rightarrow 0$  при  $\delta, \eta \rightarrow 0$ .

Соотношение  $\|u_{n(\delta, \eta)} - u_*\| \rightarrow 0$  при  $\delta, \eta \rightarrow 0$  означает, что правила (П. 0), (П. 1), (П. 2) последовательных приближений (37) определяют регуляризующие алгоритмы решения операторного уравнения (34).

**Теорема 4.** Пусть погрешность  $u_0 - u_*$  принадлежит области значений положительной степени оператора  $A^* A$  (требование истокопредставимости точного решения):  $u_0 - u_* = (A^* A)^p v$ ,  $p > 0$ ,  $\|v\| \leq r$ . Тогда в случае (П. 0) справедливы оценки:  $\|u_{n(\delta, \eta)} - u_*\| \leq C_{p,r} (\delta + \eta)^{p/(p+1)}$ ,  $n(\delta, \eta) \leq C'_{p,r} (\delta + \eta)^{-1/(p+1)}$ , а в случае правил останова (П. 1), (П. 2) – оценки:  $\|u_{n(\delta, \eta)} - u_*\| \leq C''_{p,r} (\delta + \eta)^{2p/(2p+1)}$ ,  $n(\delta, \eta) \leq C'''_{p,r} (\delta + \eta)^{-2/(2p+1)}$ .



Г. М. Вайнікко, А. Ю. Веретенников в монографии [24] для решения операторного уравнения  $Au = f$ , где  $A \in L(H_1, H_2)$  (в самосопряженном случае  $H_1 = H_2$ ,  $A = A^* \geq 0, \|A\| \leq M$ ) используют явную и неявную итерационные схемы:

$$u_n = u_{n-1} - \mu(Au_{n-1} - f), \quad 0 < \mu < \frac{2}{\|A\|}, \quad \alpha u_n + Au_n = \alpha u_{n-1} + f, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

которые в случае несамосопряженного оператора и приближенной правой части уравнения  $f_\delta : \|f - f_\delta\| \leq \delta$  запишутся

$$u_{n,\delta} = u_{n-1,\delta} - \mu A^*(Au_{n-1,\delta} - f_\delta), \quad 0 < \mu < \frac{2}{\|A\|^2}, \\ \alpha u_{n,\delta} + A^* Au_{n,\delta} = \alpha u_{n-1,\delta} + A^* f_\delta, \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Авторами подчеркивается, что в итеративных методах решение операторных уравнений, описывающих некорректные задачи, с приближенной правой частью  $f_\delta : \|f - f_\delta\| \leq \delta$  в приближениях  $u_{n,\delta}$  нельзя устремлять  $n$  к бесконечности (при  $n \rightarrow \infty$  эти приближения, как правило, расходятся). Вместо этого следует указать такое согласование  $n = n(\delta)$  числа итераций  $n$  с уровнем погрешности  $\delta$  правой части, чтобы при  $\delta \rightarrow 0$  соответствующие приближения  $u_{n,\delta}$  стремились к точному решению уравнения. Это согласование желательно провести так, чтобы получить оптимальные по порядку, а при возможности – оптимальные по точности методы. В [24] используются два основных способа выбора (согласования с  $\delta$ ) параметра регуляризации: априорный и апостериорный. В итерационных методах параметром регуляризации является номер итерации. Априорный выбор  $n$  возможен, если известен класс решений (например, класс истокорпредставимых решений), которому решение при данном  $f \in R(A)$  принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, то априорный выбор  $n$  имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности метода. Более практичен апостериорный выбор по невязке (или по поправкам [26]): выбирается то значение  $n$ , при котором норма невязки  $\|Au_{n,\delta} - f_\delta\|$  будет достаточно малой. Подобное согласование  $n$  с  $\delta$  принято называть принципом невязки. Оказывается [24], что при выборе  $n$  по принципу невязки получают оптимальные по порядку методы на классах истокорпредставимых решений и некоторых других классах, при этом сам выбор  $n$  не использует информацию об истокорпредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки  $\|f - f_\delta\| \leq \delta$ .

В работе [24] исследуется априорный выбор числа итераций с приближенной правой частью уравнения. Для явного метода итераций доказана сходимость при  $n\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ , и в предположении истокорпредставимости точного решения уравнения  $u_0 - u_* = (A^* A)^{p/2} v, p > 0, \|v\| \leq \rho$  для них получены оценки погрешности. Также авторами рассматривается апостериорный выбор параметра регуляриза-



ции, с этой целью обосновывается применение к явному методу итераций следующих правил останова:

**Правило останова (П. 3).** Зададим  $b_1 > 1$  и  $b_2 \geq b_1$ . Если  $\|Au_0 - f_\delta\| \leq b_2\delta$ , то положим  $n = 0$  (т. е.  $u_0$  – приближенное решение уравнения). В противном случае выберем такое  $n > 0$ , для которого  $b_1\delta \leq \|Au_{n,\delta} - f_\delta\| \leq b_2\delta$ .

**Правило останова (П. 4).** Зададим  $b > 1$  и  $\theta \in (0,1)$ . Если  $\|Au_0 - f_\delta\| \leq b\delta$ , то положим  $n = 0$ . В противном случае выберем любое такое  $n > 0$ , что  $\|Au_{n,\delta} - f_\delta\| \leq b\delta$ ,  $\|Au_{n',\delta} - f_\delta\| > b\delta$  для некоторого  $n' \in [\theta n, n]$ .

Кроме того, в работе рассматривается случай, когда не только правая часть, но и оператор в линейном уравнении считаются известными приближенно: вместо  $f \in R(A)$  и  $A \in L(H_1, H_2)$  даны некоторые их приближения  $f_\delta \in H_2$ , и  $A_\eta \in L(H_1, H_2)$ ,  $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ ,  $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ . И в этом случае при условии  $n(\delta, \eta) \rightarrow \infty$ ,  $(\delta + \eta)n(\delta, \eta) \rightarrow 0$ , при  $\delta, \eta \rightarrow 0$  доказана сходимость явного метода к точному решению уравнения. А при условии истокообразной представимости начальной погрешности  $u_0 - u_* = |A|^p v$ ,  $p > 0$ ,  $\|v\| \leq \rho$  получены оптимальные оценки погрешности итерационных методов  $\|u_{n(\delta, \eta)} - u_*\|_{\text{опт}} \leq C_{p, \rho, d}(\delta + \eta)^{p/(p+1)}$ ,  $0 < p \leq p_0$  при выборе  $n_{\text{опт}} = d(\delta + \eta)^{-1/(p+1)}$  ( $d > 0$ ). Здесь же рассматривается и апостериорный выбор параметра регуляризации:

**Правило останова (П. 5).** Зададим  $b_1 > 1$  и  $b_2 \geq b_1$ . Если  $\|A_\eta u_0 - f_\delta\| \leq b_2(\delta + \|u_*\|\eta)$ , то положим  $n = 0$ . В противном случае выберем такое  $n > 0$ , для которого  $b_1(\delta + \|u_*\|\eta) \leq \|A_\eta u_{n(\delta, \eta)} - f_\delta\| \leq b_2(\delta + \|u_*\|\eta)$ .

**Правило останова (П. 6).** Зададим  $b > 1$  и  $\theta \in (0,1)$ . Если при  $n = 0$   $\|A_\eta u_{n(\delta, \eta)} - f_\delta\| \leq b(\delta + \|u_*\|\eta)$ , то положим  $n = 0$ , иначе выберем любое такое  $n > 0$ , при котором  $\|A_\eta u_{n(\delta, \eta)} - f_\delta\| \leq b(\delta + \|u_*\|\eta)$  выполнено, причем для некоторого  $n' \in [\theta n, n]$   $\|Au_{n'(\delta, \eta)} - f_\delta\| \geq b(\delta + \|u_*\|\eta)$ .

В [24] рассматривается устойчивость предложенных итерационных методов приближений относительно малых возмущений типа погрешностей округления: помехоустойчивость итерационных методов (в некорректных задачах подобные возмущения безопасны лишь при не слишком большом количестве итераций). В этом случае в правой части предложенных итерационных схем появится слагаемое  $\omega_n \in H$ ,  $n \geq 1$  – малые в каком-то смысле возмущения и  $\|\omega_n\| \leq \varepsilon$ . Тогда в случае, когда  $A = A^* > 0$ ,  $A_\eta = A_\eta^*$ ,  $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ ,  $\|A_\eta\| \leq a$ ,  $f \in R(A)$ ,  $\|f_\delta - f\| \leq \delta$ ,  $\|\omega_n\| \leq \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll \delta + \eta$ ) и  $u_0 - u_* = A^p v$ ,  $p > 0$ ,  $\|v\| \leq \rho$  (и в случае несамосопряженной задачи тоже) получены оценки погрешности методов:  $\|\tilde{u}_{n(\delta, \eta, \varepsilon)} - u_*\| \leq C_{a, p, \rho}(\delta + \eta + \varepsilon)^{p/(p+1)}$ ,  $0 < p < \infty$ .



Здесь также рассмотрен случай нормально разрешимой задачи, т. е. задачи  $Au = f$  с оператором  $A \in L(H_1, H_2)$ , имеющим замкнутую область значений  $R(A) \subseteq H_2$ . Изучен априорный и апостериорный выборы параметра регуляризации.

Кроме этого, авторы рассматривают предложенную ими явную итерационную процедуру в некорректных задачах в условиях случайных ошибок: доказана сходимость методов по вероятности, сходимость методов в среднем квадратичном, обоснован статистический подход к выбору числа итераций.

Различные схемы явных и неявных итеративных методов с априорным выбором числа итераций предложены в работах О. А. Лисковца и В. Ф. Савчука [41–44]. В. Ф. Савчук [45–58] продолжил исследования в этом направлении. Им предложено несколько новых явных и неявных итеративных методов решения некорректных задач в гильбертовом пространстве с ограниченным и неограниченным, самосопряжённым и несамосопряженным операторами. Для этих методов подробно рассмотрен априорный выбор числа итераций, доказана их сходимость, получены эффективные оценки погрешности. Для некоторых из предложенных итеративных схем обоснована возможность применения правил останова по невязке и по соседним приближениям, которые превращают эти методы в регуляризующие алгоритмы для задачи  $Ax = y_\delta$ , не требуя при этом знания истокопредставимости точного решения, но в случае истокопредставимости обеспечивают оптимальную в классе скорость сходимости.

А. М. Денисов [25] решает операторное уравнение  $Az = \bar{u}$ , где  $A: Z \rightarrow U$  – линейный, вполне непрерывный оператор ( $Z, U$  – сепарабельные гильбертовы пространства),  $0 \in S_A$  и  $0$  не является собственным значением оператора  $A$ . Предполагается, что рассматриваемое уравнение имеет единственное решение  $\bar{z}$ , элемент  $\bar{u}$  не известен, а задана приближенная правая часть  $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$ . Для нахождения приближенного решения предлагается явный итерационный процесс

$$z_n = z_{n-1} + \mu(A^* u_\delta - A^* A z_{n-1}), \quad z_0 = \mu A^* u_\delta, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $A^*$  – оператор, сопряженный с  $A$ ,  $\mu$  – положительный числовой параметр. Показано, что справедливо  $z_n = R_n u_\delta = \mu \sum_{i=0}^n (E - \mu A^* A)^i A^* u_\delta$ . Затем доказано, что если

при  $0 < \mu < \frac{2}{\|A^* A\|}$  выбрать  $n = n(\delta)$  так, что  $n(\delta)\delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то пред-

ложенный метод сходится при приближенной правой части уравнения, т. е., что  $\|R_{n(\delta)} u_\delta - \bar{z}\| \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

А. А. Самарский и П. Н. Вабищевич (А. А. Samarsky and P. N. Vabishchevitch) в монографии [59] рассматривают двухслойный итерационный метод для решения уравнения  $Au = f_\delta$  с приближенной правой частью  $B \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1}} + Au_k = f_\delta$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Здесь  $B: H \rightarrow H$  и  $B^{-1}$  существует. Применение итерационного метода для симметризованной задачи соответствует использованию приближений



$B \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau_{k+1}} + A^* Au_k = A^* f_\delta$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . При  $B = E$  и постоянном итерационном па-

параметре  $\tau_k = \tau$  получим метод простой итерации  $\frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + Au_k = f_\delta$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Доказана его сходимость. Скорость сходимости последнего метода определяется постоянными  $\gamma_1, \gamma_2$  в неравенстве  $\gamma_1 E \leq A \leq \gamma_2 E$ . При  $\gamma_1 > 0$  метод простой итерации сходится в  $H$ , если  $0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}$ , а для числа итераций  $n$ , необходимого для достижения

точности  $\varepsilon$ , справедлива оценка  $n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho_0}$ ,  $\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$ ,  $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ . Доказана

**Теорема 5.** Пусть в методе последовательных приближений  $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + Au_n = f_\delta$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  при условии  $0 < \tau < \frac{2}{\gamma_2}$  число итераций  $n(\delta) \rightarrow \infty$  и  $n(\delta)\delta \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Тогда  $\|u_{n(\delta)} - u\| \rightarrow 0$ , если  $\delta \rightarrow 0$ .

Рассматривается метод простой итерации и при более жестких ограничениях:  $0 < \tau \leq \frac{1}{\gamma_2}$ , и в предположении истокопредставимости точного решения получена оценка погрешности. Справедлива

**Теорема 6.** Пусть точное решение уравнения принадлежит классу  $\|A^{-p}u\| \leq M$ ,  $0 < p < \infty$ , тогда для метода простой итерации с  $u_0 = 0$  справедлива оценка погрешности  $\|z_n\| \leq n\tau\delta + M_1 n^{-p}$ ,  $M_1 = M_1(\tau, p, M)$ .

Авторами проведена минимизация правой части полученной оценки погрешности и найдено  $n_{\text{опт}} = \left(\frac{pM_1}{\tau}\right)^{\frac{1}{p+1}} \delta^{-\frac{1}{p+1}}$ , т. е.  $n(\delta) = O(\delta^{-1/(p+1)})$ . Получена оптималь-

ная оценка погрешности метода простой итерации  $\|z_{n_{\text{опт}}}\| \leq M_2 \delta^{\frac{p}{p+1}}$ , где

$M_2 = \tau \left(\frac{pM_1}{\tau}\right)^{\frac{1}{p+1}} + M_1 \left(\frac{pM_1}{\tau}\right)^{-\frac{p}{p+1}}$ . В работе [59] приводится программная реализа-

ция нахождения приближенного решения модельной двумерной задачи продолжения гравитационных полей (потенциала) с использованием метода простой итерации со случайными погрешностями во входных данных.

В последние годы продолжено изучение приближенных методов решения некорректных задач. Над этой проблемой работают В. В. Васин, А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, А. С. Леонов, А. М. Денисов, П. Н. Вабишевич, А. Л. Агеев, Г. В. Хромова, В. А. Морозов, С. Г. Солодкий, С. И. Кабанихин, А. С. Апарцин, U. Hämarik, R. Palm, T. Raus, S. F. Gilyazov, N. L. Gol'dman, H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, B. Hofmann, L. Wolfersdorf, J. Janno, U. Tautenhahn, B. Kaltenbacher, A. Neubauer,



О. Scherzer, Е. Klann, М. Nussbaum, S. Pereverzev, В. Nguyen, R. Ramlau, И. В. Коннов, И. П. Рязанцева, В. Ф. Чистяков и др. Эти учёные исследуют свойства модификаций методов Лаврентьева и регуляризации (Тихонова), различных схем градиентных и проекционных методов, а также решают нелинейные некорректные задачи.

В рассмотренных выше работах построены итерационные методы решения некорректных задач и доказано, что среди приближений, полученных этими методами, есть сколь угодно близкие к точному решению. Естественно, возник вопрос об описании всего многообразия таких итерационных схем и их сравнительного анализа с точки зрения скорости сходимости и оценки числа итераций для достижения нужных погрешностей.

Автором статьи впервые предложены 8 регуляризующих алгоритмов для некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода, в виде явных и неявных итерационных методов, обладающих более высокими скоростными качествами, чем ранее известные методы [60–61]. Проведено сравнение предложенных методов с наиболее изученным в литературе методом итерации Ландвебера (34).

Более конкретно, явные методы:

а) метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{2n+1} = \alpha, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

для получения оптимального решения требует в три раза меньше итераций, чем метод простой итерации с постоянным шагом (34);

б) семейство явных методов с более высокой степенью оператора, обобщающее метод простой итерации (34),

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^k x_{n,\delta} + A^{-1} \left[ E - (E - \alpha A)^k \right] y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N$$

для получения оптимального решения требует в  $k$  раз меньше итераций, чем метод простой итерации;

в) явная итерационная схема, обобщающая метод простой итерации (34)

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^k) x_{n,\delta} + \alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N$$

эффективна в зависимости от выбора степени истокорпредставимости  $s$ : для  $s \leq 5$  его удобнее применять при  $k = 1$ , а для  $6 \leq s \leq 27$  – при  $k = 2$ ;

г) двухшаговая процедура явного типа

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0.$$

по мажорантным оценкам погрешности не уступает методу итераций (34).

Неявные методы, представляющие собой семейства итерационных схем, зависящих от параметра  $k$ :

$$(E + \alpha A^k) x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^k) x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1} y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N,$$



$$\begin{aligned}(E + \alpha A^k)x_{n+1,\delta} &= x_{n,\delta} + \alpha A^{k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N, \\(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1,\delta} &= (E - \alpha A^k)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N, \\(A^{2k} + B)x_{n+1,\delta} &= Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N\end{aligned}$$

в силу отсутствия ограничений сверху на шаг по антиградиенту позволяют получить оптимальное решение уже на первых шагах итераций. Последний из предложенных неявных методов позволяет решать операторные уравнения с неограниченным оператором, притом необязательно положительным.

Для предложенных методов впервые проведено достаточно полное исследование. Сначала изучен априорный выбор числа итераций для уравнений с приближенно заданной правой частью и точным оператором. При этом установлены достаточные условия сходимости методов, получены априорные оценки погрешности в предположении, что известен класс истокообразно представимых решений, которому решение при данном  $y \in R(A)$  принадлежит. Поскольку такая информация обычно недоступна или неточна, априорный выбор числа итераций имеет в основном теоретическое значение: он позволяет выявлять принципиальные возможности методов.

Использование в работе энергетической нормы  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$  позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова методов уже без дополнительного требования на гладкость точного решения. Получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Предлагается и другой способ сделать методы эффективными и тогда, когда отсутствует дополнительная информация на гладкость точного решения. Для этого в работе обосновано применение к итерационным методам правила останова по малости невязки: выбирается то значение итераций  $n$ , при котором невязка сравнима с уровнем погрешности правой части уравнения. Подобное согласование  $n$  с уровнем погрешности правой части принято называть *принципом невязки*. Оказывается, что при таком выборе  $n$  мы получаем оптимальные по порядку методы на классах истокопредставимых решений, при этом сам выбор  $n$  не использует информацию истокопредставимости и вообще какую-либо другую информацию, кроме оценки уровня погрешности правой части уравнения. Доказано, что в этом случае предложенные итерационные методы сходятся к точному решению, для них получены оценки погрешности и оценки для момента останова.

Также в диссертации доказана сходимость рассматриваемых методов и получены оценки для апостериорного момента останова в случае применения к методам правила останова по разности соседних приближений (по поправкам): использование этого правила останова делает методы эффективными при отсутствии информации об истокопредставимости точного решения.

Для всех методов исследован случай неединственного решения уравнения (нуль является собственным значением оператора). Показано, что тогда итерационные процессы сходятся к решению, обладающему минимальной нормой.

Для некоторых из предложенных методов изучен априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации в случае приближенной правой части уравнения и при-



ближенно заданного самосопряженного и несамосопряженного оператора: доказана сходимость методов, получены оценки погрешности, априорный момент останова и оценки для апостериорного момента останова.

Некоторыми из предложенных методов решены модельные некорректные задачи. Для их решения использовались ПЭВМ, программы составлялись на языке программирования JAVA. Причем при решении модельных задач нашли подтверждение выводы о преимуществах предложенных методов по сравнению с наиболее изученным явным методом простой итерации (34).

*Выявлены общие свойства этих итерационных процедур и получен новый метод сведения решения поставленной задачи к решению специального вида уравнения второго рода, исследования которого было выполнено в работах профессора М. А. Красносельского. На этом пути получены теоремы о сходимости ошибок, невязок и поправок, даны оценки скорости этих сходимостей в норме исходного гильбертова пространства, а также показана возможность получения теорем о сходимости и скорости сходимости в «ослабленных» (в частности, энергетических) нормах.*

Все эти установленные факты являются новыми и вносят существенный вклад в теорию некорректно поставленных задач и методов их приближенного решения.

Очень важно теперь пояснить, что мы понимаем под сходимостью предложенных итерационных процедур, когда правая часть операторного уравнения  $Ax = y$  задана приближенно (т. е. известен  $y_\delta$ , для которого  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ). Полученные в работе для методов априорные оценки погрешности описываются неравенствами вида

$$\|x_{n,\delta} - x_*\| \leq \|x_n - x_*\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \|x_n - x_*\| + cn\delta, \quad (39)$$

где  $x_*$  – точное решение уравнения  $Ax = y_\delta$ ,  $c$  – некоторое положительное число.

Из неравенств (39) сходимость  $x_{n,\delta}$  к  $x_*$  не вытекает, т. к. правая часть в (39) при  $n \rightarrow \infty$  не стремится к нулю (и, более того, обычно стремится к бесконечности). Однако во многих случаях из этих неравенств вытекает, что, с одной стороны, при достаточно больших, но не слишком больших, номерах  $n$  приближения  $x_{n,\delta}$  находятся достаточно близко к точному решению  $x_*$  уравнения  $Ax = y_\delta$ . Более того, эти приближения для достаточно малых в естественном смысле  $\delta$  «подходят» к точному решению  $x_*$  сколь угодно близко!

Нетрудно доказать, что для некоторой стремящейся к нулю последовательности неотрицательных чисел  $\mu_n$  справедливо неравенство  $\|x_n - x_*\| \leq \mu_n$ . Тогда неравенство (39) переписывается в виде

$$\|x_{n,\delta} - x_*\| \leq \mu_n + cn\delta \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (40)$$

Последовательность  $(cn\delta)$  является возрастающей; она может быть как неограниченной, так и ограниченной.

Особенности поведения последовательности  $(\mu_n + cn\delta)$  удобно сформулировать в виде нижеследующего утверждения:

*Пусть последовательность  $(\mu_n)$  стремится к нулю, а последовательность  $(cn\delta)$  неубывающая. Тогда*



$$\lim_{n \rightarrow \infty, n\delta \rightarrow 0} (\mu_n + cn\delta) = 0. \quad (41)$$

Інаچه гаворы, пры заданном  $\varepsilon > 0$  пры дастаточна малых  $\delta > 0$  выконняецца неравенство  $\mu_n + cn\delta < \varepsilon$  на сколь угодно далеких и сколь угодно больших промежутках изменения  $n$ .

Соотношение (41) иногда записывается в виде

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \min_{v \leq n < \infty} \{ \mu_n + cn\delta \} = 0 \quad (v \in N). \quad (42)$$

Однако без дополнительного предположения о сходимости последовательности  $(\mu_n)$  к нулю это соотношение слабее (41).

Сделаем еще важное замечание. Неравенства (40) оказываются полезными лишь в тех случаях, когда при увеличении  $n$  правая часть  $\mu_n + n\delta$  уменьшается. Факт уменьшения на одном шаге этой правой части эквивалентен неравенству  $\delta < \mu_n - \mu_{n+1}$ . Тем самым проведенные рассуждения показывают, что последовательное вычисление приближений оказывается полезным при  $n \in [0, N]$  лишь в случае, если  $\delta < \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{c}$ .

При выполнении последнего соотношения будем говорить, что соответствующий итерационный метод *квазисходится*.

Еще раз отметим, что в случае квазисходимости предложенных итерационных методов речь не идет об обычной сходимости соответствующих приближений к точному решению. Можно лишь утверждать, что при достаточно малых  $\delta$  эти приближения оказываются близкими к точному решению, а затем, как правило, от него удаляются; при этом эти приближения оказываются тем ближе к точному решению, чем меньше  $\delta$ . Более того, если  $\delta$  не является достаточно малым, то использование итерационных методов окажется бесполезным – эти приближения могут удаляться от точного решения.

Таким образом, под сходимостью предложенных итерационных методов понимается утверждение о том, что приближения  $x_{n,\delta}$  сколь угодно близко подходят к точному решению некорректного уравнения  $Ax = y_\delta$  при подходящем выборе  $n$  и достаточно малых  $\delta$ , т. е. если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_n \|x_{n,\delta} - x_*\| = 0$ .

Отметим еще, что в упомянутом выше «парадоксальном случае»  $\mu_n = 0$  оказывается, что начальное приближение  $x_0$  совпадает с решением  $x_*$ . Именно в этом случае рассуждения о последовательности  $(\mu_n + cn\delta)$ , приведенные выше, вырождаются и оценка (40) делается бесполезной. Однако она и должна быть таковой: если начальное приближение совпадает с точным решением  $x_*$ , то уточнять это приближение какими-либо итерационными процедурами бессмысленно.

Рассмотрим теперь поведение оценок  $\|x_{n,\delta} - x_*\|$  для примера, когда  $f = \mu_n + cn\delta = \frac{1}{n} + n\delta$  при  $\delta \in \{0,4; 0,1; 0,06; 0,02\}$ . Оптимизируем по  $n$  приведенную



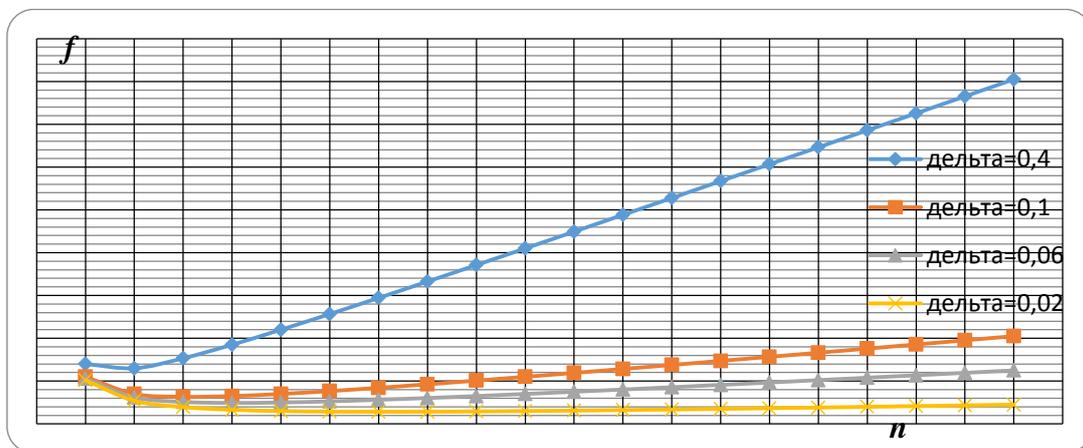
оценку погрешности. Для этого найдем значение числа итераций  $n$ , при котором оценка становится минимальной. Имеем  $n_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  (причём  $n_{\text{опт}}\delta = \sqrt{\delta} \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ).

Подставив полученное выражение для  $n_{\text{опт}}$  в оценку погрешности, найдем ее оптимальное значение  $\|x_{n,\delta} - x_*\|_{\text{опт}} \leq 2\sqrt{\delta} \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Тогда при  $\delta = 0,4$   $f_1 = \frac{1}{n} + 0,4n$ ,

$n_{\text{опт}} = 2$ ,  $f_1(n_{\text{опт}}) = 1,3$ ; при  $\delta = 0,1$   $f_2 = \frac{1}{n} + 0,1n$ ,  $n_{\text{опт}} = 3$ ,  $f_2(n_{\text{опт}}) = 0,63$ ;

при  $\delta = 0,06$   $f_3 = \frac{1}{n} + 0,06n$ ,  $n_{\text{опт}} = 4$ ,  $f_3(n_{\text{опт}}) = 0,49$ ; при  $\delta = 0,02$   $f_4 = \frac{1}{n} + 0,02n$ ,

$n_{\text{опт}} = 7$ ,  $f_4(n_{\text{опт}}) = 0,28$ . Графики функций  $\frac{1}{n} + n\delta$  изображены на рисунке.



Рисунок

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гурса, Э. Курс математического анализа : в 3 т. / Э. Гурса. – М. ; Л. : Гос. техн.-теорет. изд-во, 1933. – Т. 3, ч. 2. – 321 с.
2. Fenyó, S. Theorie und praxis der linearen Integralgleichungen / S. Fenyó, H. W. Stolle. – Birkhauser Verlag Basel : Math. Reihe. Bd. 77, 1984. – 708 p.
3. Zaanen, A. Linear Analysis / A. Zaanen. – Amsterdam : North Holland Publ., 1959. – 600 p.
4. Халилов, З. И. Основы функционального анализа / З. И. Халилов. – М : URSS, 2018. – 256 с.
5. Danford, N. Linear operators. Spectral theory / N. Danford, D. Shwartz. – New York : Interscience Publishers, 1958. – 1923 p.
6. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
7. Фридман, В. М. Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода / В. М. Фридман // Успехи мат. наук. – 1956. – Т. 11, № 1 (67). – С. 233–234.



8. Положий, Г. Н. Об одном методе решения интегральных уравнений / Г. Н. Положий // Изв. АН СССР. Сер. мат. наук. – 1959. – Т. 23, № 2. – С. 295–312.
9. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, Nr 2. – P. 166–176.
10. Koliha, J. J. Metrics, Norms, and Integrals / J. J. Koliha. – Melbourne : World Scientific Publ., 1974. – 428 p.
11. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1975. – 346 с.
12. Lyashko, S. I. Generalized optimal control of linear systems with distributions parameters / S. I. Lyashko. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2002. – 453 p.
13. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
14. Phillips, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // J. Assoc. Comput. Mach. – 1962. – Vol. 9, Nr 1. – P. 84–97.
15. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Мат. сб. – 1963. – Т. 61 (103), № 2. – С. 211–223.
16. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
17. Антохин, Ю. Т. О некоторых задачах аналитической теории уравнений I-го рода / Ю. Т. Антохин // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 226–240.
18. Апарцин, А. С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве / А. С. Апарцин // Труды по прикладной математике и кибернетике. – Иркутск, 1972. – С. 7–14.
19. Крянев, А. С. Итерационный метод решения некорректных задач / А. С. Крянев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1974. – Т. 14, № 1. – С. 25–35.
20. Фридман, В. М. О сходимости методов типа наискорейшего спуска / В. М. Фридман // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17, вып. 3. – С. 201–204.
21. Страхов, В. Н. О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки / В. Н. Страхов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1967. – № 4. – С. 36–54.
22. Страхов, В. Н. К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации / В. Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – Т. 13, № 6. – С. 1602–1606.
23. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
24. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
25. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
26. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
27. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
28. Лисковец, О. А. Об одном итеративном методе решения уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Вопросы прикладной математики : сб. науч. ст. – Иркутск, 1975. – С. 159–166.



29. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.
30. Савчук, В. Ф. Некоторые итеративные методы решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 5. – С. 23–27.
31. Bakushinsky, A. B. Iterative methods for ill-posed problems / A. B. Bakushinsky, M. Yu. Kokurin, A. B. Smirnova. – Berlin : De Gruyter, 2011. – 136 p.
32. Gilyazov, S. F. Regularization of ill-posed problems by iteration methods / S. F. Gilyazov, N. L. Gol'dman. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000. – 340 p.
33. Kabanikhin, S. I. Inverse and ill-posed problems. Theory and applications / S. I. Kabanikhin. – Berlin : De Gruyter, 2011. – 459 p.
34. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
35. Константинова, Я. В. Градиентный метод с переменным шагом для уравнений I-го рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – № 2. – С. 45–49.
36. Константинова, Я. В. Метод итераций неявного типа для уравнений I-го рода и его сравнение с явным методом / Я. В. Константинова // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. – 1979. – № 1. – С. 63–65.
37. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики : учеб. пособие : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – Минск : Выш. шк., 1975. – Т. 2. – 672 с.
38. Лисковец, О. А. Вариационные методы решения неустойчивых задач / О. А. Лисковец. – Минск : Наука и техника, 1981. – 342 с.
39. Емелин, И. В. Спурт-метод построения последовательных приближений / И. В. Емелин, М. А. Красносельский, Н. П. Панских // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 219, № 3. – С. 535–538.
40. Вайникко, Г. М. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах / Г. М. Вайникко. – Тарту : Изд-во Тартус. ун-та, 1982. – 110 с.
41. Лисковец, О. А. Об одном итеративном методе решения уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Вопросы прикладной математики : сб. науч. ст. – Иркутск, 1975. – С. 159–166.
42. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.
43. Лисковец, О. А. Метод простых итераций с попеременно чередующимся шагом для уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21, № 1. – С. 9–12.
44. Лисковец, О. А. Правило останова итераций в неявных итеративных методах для уравнений I рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1991. – № 2. – С. 3–8.
45. Савчук, В. Ф. Некоторые итеративные методы решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 5. – С. 23–27.
46. Савчук, В. Ф. Сходимость в энергетической норме неявного метода решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук // II республиканская конференция молодых ученых



ИФМ Литовской ССР, Вильнюс, 15–17 апр. 1976 г. : тез. докл. – Вильнюс, 1976. – С. 53–54.

47. Савчук, В. Ф. Сходимость одного метода решений линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1981. – № 4. – С. 53–58.

48. Савчук, В. Ф. Правило останова по невязке для метода простых итераций с попеременно чередующимся шагом / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1986. – № 6. – С. 109–111.

49. Савчук, В. Ф. Оценки погрешностей в неявном итеративном методе решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук ; Брест. пед. ин-т. – Брест, 1986. – 11 с. – Деп. в ВИНТИ, № 5960-B87.

50. Савчук, В. Ф. Правило останова по соседним приближениям в итеративных методах решения линейных уравнений / В. Ф. Савчук ; Брест. пед. ин-т. – Брест, 1990. – 16 с. – Деп. в ВИНТИ, № 2430-B90.

51. Савчук, В. Ф. Регуляризация линейных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1993. – № 3. – С. 110–112.

52. Савчук, В. Ф. Выбор правила останова в неявной итерационной схеме решения линейного уравнения I рода / В. Ф. Савчук ; Брест. пед. ин-т. – Брест, 1994. – 6 с. – Деп. в ВИНТИ, № 199442-D94.

53. Савчук, В. Ф. Апостериорный выбор числа итераций в неявном итеративном методе решения линейных уравнений / В. Ф. Савчук ; Брест. педин-т. – Брест, 1997. – 14 с. – Деп. в ВИНТИ, № 358-B97.

54. Савчук, В. Ф. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного метода итераций решения уравнений I рода / В. Ф. Савчук. И. Г. Кожух // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 1998. – № 6. – С. 22–26.

55. Савчук, В. Ф. О применении итеративных методов к решению обратных задач теории потенциала / В. Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 1999. – № 2. – С. 30–36.

56. Савчук, В. Ф. Неявный метод решения некорректных задач в случае приближенно заданного оператора / В. Ф. Савчук // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры : тр. междунар. мат. конф., Брест, 19–22 сент. 2000 г. / Брест. гос. ун-т ; редкол.: Н. И. Юрчук [и др.]. – Брест, 2001. – С. 116–120.

57. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений при помощи градиентного метода с переменным шагом / В. Ф. Савчук // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна : зб. навук. пр. – Брест, 2005. – Т. 1, ч. 2. – С. 19–29.

58. Савчук, В. Ф. Априорные оценки погрешности в неявном методе итераций решения некорректных задач / В. Ф. Савчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2007. – № 1 (28). – С. 22–26.

59. Samarsky, A. A. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics / A. A. Samarsky, P. N. Vabishchevitch. – Berlin : De Gruyter, 2007. – 480 p.

60. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик ; БрГУ им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.

61. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 05.10.2020*



УДК 539.12:530.145

**Владимир Анестиевич Плетюхов**

*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

**Vladimir Pletikhov**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,  
Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
of Brest State A. S. Pushkin University*

*e-mail: otf@brsu.brest.by*

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФЕРМИОНЫ НА РЕШЕТКЕ

*Показано, что геометризованный способ описания кварков посредством тензорных полей в решеточном пространстве не приводит к физически неинтерпретируемому (по сравнению с континуумом) расщеплению энергетического спектра, как это имеет место в случае уравнения Дирака. Для достижения указанной цели предлагаются, помимо уравнения Дирака – Кэлера, его 32- и 48-компонентные обобщения.*

### *Geometric Fermiones on a Lattice*

*It is shown that the geometrized way of describing quarks by means of tensor fields in lattice space does not lead to physically uninterpretable (in comparison with continuum) splitting of the energy spectrum, as is the case in the case of the Dirac equation. To achieve this goal, in addition to the Dirac – Kähler equation, its 32- and 48-component generalizations are proposed.*

### **Введение**

Решеточная формулировка квантовой хромодинамики является одним из важных направлений в теории калибровочных полей [1] и цитированную там литературу. Однако известно [2], что использование для этой цели уравнения Дирака в качестве исходного приводит к физически не интерпретируемому 16-кратному увеличению числа состояний. Геометризованный же способ описания кварков посредством тензорной системы Дирака – Кэлера [3] свободен от указанной трудности, поскольку ее решениям не характерно дополнительное (по сравнению с континуумом) расщепление энергетического спектра в решеточном пространстве – времени. Принципиальным обоснованием такой возможности является соответствие на классическом и квантовом уровнях между описанием частиц с переменным целым спином и частиц с одним полуцелым спином и внутренними степенями свободы. Еще более перспективны в данном отношении 32- и 48-компонентная тензорные полевые системы, обладающие теми же преимуществами, что и уравнение Дирака – Кэлера, но позволяющие благодаря большей размерности трактовать с единых позиций большее число внутренних степеней свободы кварков, включая сюда и калибровочные.

В п. 1 настоящей работы дана последовательная тензорная формулировка решеточного уравнения Дирака – Кэлера и исследованы его симметричные свойства. Осуществлена редукция исходной 16-компонентной системы на 8-компонентные подсистемы, каждая из которых сопоставляется одному поколению кварков. Использование матричного формализма позволяет построить универсальную процедуру записи диракоподобных релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка с размерностью, кратной 16, в решеточном пространстве без дополнительного расщепления спектра.



В п. 2 эта процедура применена к 32- и 48-компонентному тензорным обобщениям поля Дирака – Кэлера.  $SU(2)$ - и  $SU(3)$ -симметрии, присущие полученным таким образом решеточным моделям, связываются с калибровочными степенями свободы кварков.

В п. 3 затрагиваются вопросы введения массы и калибровочного взаимодействия в рассматриваемых моделях, а также некоторые другие физические следствия развиваемого подхода.

### 1. О решеточном описании набора антисимметричных тензорных полей

Будем рассматривать четырехмерную евклидову гиперкубическую клетку с шагом  $\alpha = 1$ . Как известно, переход к решеточному описанию осуществляется путем замены континуальных производных  $\partial_\mu$  на решеточные  $\nabla_\mu$ . При этом, в принципе, возможны три типа решеточных производных:  $\nabla_{\mu(+)}$ ,  $\nabla_{\mu(-)}$  и  $\nabla_{\mu(\pm)}$ , где

$$\nabla_{\mu(+)}f(x) = f(x + e_\mu) - f(x), \quad (1.1)$$

$$\nabla_{\mu(-)}f(x) = f(x) - f(x + e_\mu), \quad (1.2)$$

$$\nabla_{\mu(\pm)}f(x) = \frac{1}{2}[f(x + e_\mu) - f(x - e_\mu)], \quad (1.3)$$

$e_\mu$  – единичный вектор, соединяющий два соседних узла решетки в направлении  $\mu$ . Оператор Даламбера  $\square$  может быть одним из следующих способов:  $\nabla_{\mu(+)}^2$ ,  $\nabla_{\mu(-)}^2$ ,  $\nabla_{\mu(\pm)}^2$  и  $\nabla_{\mu(+)}\nabla_{\mu(-)}$ . Анализ энергетического спектра решеточного уравнения Клейна – Фока – Гордона для решений вида  $\Psi(x) \sim \exp(ip_\mu x_\mu)$  показывает, что при выборе даламбертиана способом  $\nabla_{\mu(+)}^2$  или  $\nabla_{\mu(-)}^2$  законы дисперсии приводят к мнимым значениям энергии и, следовательно, физически бессодержательны. Оператор  $\nabla_{\mu(\pm)}^2$  отвечает за расщепление спектра («удвоение» состояний). Вещественные значения энергии без расщепления спектра получаются только при выборе  $\square = \nabla_{\mu(+)}\nabla_{\mu(-)}$ . Соответствующая решеточная система первого порядка имеет при этом вид

$$\nabla_{\nu(-)}\varphi_{[\mu\nu]} + \nabla_{\mu(+)}\varphi = 0, \quad (1.4a)$$

$$\nabla_{\nu(+)}\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \nabla_{\mu(-)}\tilde{\varphi} = 0, \quad (1.4б)$$

$$-\nabla_{\mu(+)}\varphi_\nu + \nabla_{\nu(+)}\varphi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_{\alpha(-)}\tilde{\varphi}_\beta = 0, \quad (1.4в)$$

$$\nabla_{\nu(-)}\varphi_\mu = 0, \nabla_{\mu(+)}\tilde{\varphi}_\mu = 0. \quad (1.4г)$$

Система (1.4) может быть выведена также из формулировки уравнения Дирака – Кэлера (ДК) в теории внешних дифференциальных форм, если воспользоваться правилами, сформулированными в [4]. Оператор производной  $\partial_\mu$  обладает, как известно, такими же лоренцевскими трансформационными свойствами, что и 4-вектор. Поэтому градиент  $\partial_\mu\varphi$  скалярной функции  $\varphi$ , сопоставляемой узлам решетки, естественно рассматривать как вектор, сопоставляемый ее ребрам; антисимметричный тензор второго ранга сопоставляется граням решетки, три-вектор – ламилярному вектору, четырех-вектор – объему. Решеточные аналоги производных от тензорных функций определяются по-разному в зависимости от того, повышают они ранг тензоров или понижают. Если повышают, то надо брать  $\nabla_{\mu(+)}$ , если понижают –  $\nabla_{\mu(-)}$ . В соответствии с этими



правилами и определена система (1.4a) – (1.4г) (напомним, что под  $\tilde{\varphi}_\mu, \tilde{\varphi}$  надо понимать тензоры  $\varphi_{[\nu\alpha\beta]}$  и  $\varphi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ ).

Запишем решеточный аналог (1.4) уравнения ДК в матричной форме. Для этого введем две четверки матриц  $\Gamma_{\mu(+)}$  и  $\Gamma_{\mu(-)}$ , задаваемых в базисе

$$\Psi = \{\tilde{\varphi}_1, \varphi_1, \varphi_{[23]}, \varphi_{[14]}, \tilde{\varphi}_2, \varphi_2, \varphi_{[31]}, \varphi_{[24]}, \tilde{\varphi}_3, \varphi_3, \varphi_{[12]}, \varphi_{[34]}, \varphi_4, \tilde{\varphi}_4, \varphi, \tilde{\varphi}\} \quad (1.5)$$

согласно определению

$$\Gamma_{\mu(+)} = e^{\mu,0} + e^{[\lambda\mu],\lambda} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\rho\omega}e^{\lambda',[\rho\omega]} + e^{o',\mu'}, \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{\mu(-)} = e^{o,\mu} + e^{\lambda,[\lambda\mu]} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\rho\omega}e^{[\rho\omega],\lambda'} + e^{\mu',o'}, \quad (1.7)$$

Тогда системе (1.4) может быть придан вид

$$(\Gamma_{\mu(+)}\nabla_{\mu(+)} + \Gamma_{\mu(-)}\nabla_{\mu(-)})\Psi = 0. \quad (1.8)$$

Здесь, как и в континуальном случае, основная физическая информация содержится в числовых матрицах  $\Gamma_{\mu(\pm)}$ , что позволяет при анализе динамических приложений применять методы, развитые в континууме.

Основные свойства матриц  $\Gamma_{\mu(\pm)}$  таковы:

$$\Gamma_{\mu(+)} + \Gamma_{\mu(-)} = \Gamma_\mu, \quad (1.9)$$

$$\Gamma_{\mu(\pm)}\Gamma_{\nu(\pm)} + \Gamma_{\nu(\pm)}\Gamma_{\mu(\pm)} = 0, \quad (1.10)$$

$$\Gamma_{\mu(\pm)}\Gamma_{\nu(\mp)} + \Gamma_{\nu(\mp)}\Gamma_{\mu(\pm)} = \delta_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

С помощью соотношений (1.9) – (1.11) можно показать, что для компонентов волновой функции  $\Psi$  из (1.8) получается «правильное» решеточное уравнение второго порядка

$$\nabla_{\mu(+)}\nabla_{\mu(-)}\Psi = 0. \quad (1.12)$$

Для этого подействуем на (1.8) оператором  $\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)} + \Gamma_{\nu(-)}\nabla_{\nu(-)}$ :

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)} + \Gamma_{\nu(-)}\nabla_{\nu(-)})(\Gamma_{\mu(+)}\nabla_{\mu(+)} + \Gamma_{\mu(-)}\nabla_{\mu(-)})\Psi = \\ & = (\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}\Gamma_{\mu(+)}\nabla_{\mu(+)} + \Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}\Gamma_{\mu(-)}\nabla_{\mu(-)} + \\ & + \Gamma_{\nu(-)}\nabla_{\nu(-)}\Gamma_{\mu(+)}\nabla_{\mu(+)} + \Gamma_{\nu(-)}\nabla_{\nu(-)}\Gamma_{\mu(-)}\nabla_{\mu(-)})\Psi = \\ & = (\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}\Gamma_{\mu(-)}\nabla_{\mu(-)} + \Gamma_{\nu(-)}\nabla_{\nu(-)}\Gamma_{\mu(+)}\nabla_{\mu(+)})\Psi = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где учтено, что  $\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}\Gamma_{\mu(+)}\nabla_{\mu(+)}\Psi = \Gamma_{\nu(-)}\nabla_{\nu(-)}\Gamma_{\mu(-)}\nabla_{\mu(-)}\Psi = 0$ , поскольку произведения  $\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}$ ,  $\Gamma_{\nu(-)}\nabla_{\nu(-)}$  антисимметричны (1.10), а  $\nabla_{\nu(+)}\nabla_{\mu(+)}$ ,  $\nabla_{\nu(-)}\nabla_{\mu(-)}$  симметричны по индексам  $\mu, \nu$ . В силу условий (1.11) имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}\Gamma_{\mu(-)}\nabla_{\mu(-)} & = (\delta_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu(-)}\Gamma_{\nu(+)})\nabla_{\nu(+)}\nabla_{\mu(-)} = \\ & = \nabla_{\mu(+)}\nabla_{\mu(-)} - \Gamma_{\mu(-)}\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}\nabla_{\mu(-)}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подстановка (1.14) в (1.13) дает

$$(\nabla_{\mu(+)}\nabla_{\mu(-)} - \Gamma_{\mu(-)}\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}\nabla_{\mu(-)} + \Gamma_{\mu(-)}\Gamma_{\nu(+)}\nabla_{\nu(+)}\nabla_{\mu(-)})\Psi = 0. \quad (1.15)$$



Второй и третий члены в левой части равенства (1.15) одинаковы (без учета знаков), в чем легко убедиться, переобозначив индексы суммирования  $\mu \leftrightarrow \nu$  в одном из них. В результате из (1.15) следует уравнение (1.12), что и требовалось доказать.

Из (1.9) – (1.11) вытекает также, что операторы  $\Gamma_{\mu(+)}\partial_\mu$  и  $\Gamma_{\mu(-)}\partial_\mu$  являются прямыми матричными аналогами операторов  $d$  и  $\delta$ , вводимых в аппарате внешних дифференциальных форм и используемых для записи континуального уравнения ДК. Подчеркнем, что для дираковских матриц размерности  $4 \times 4$  не существует представления со свойствами (1.9) – (1.11).

В фермионном базисе, характеризующемся тем, что волновая функция поля ДК рассматривается в нем как дираковский биспинор второго ранга, матрицы  $\Gamma_{\mu(+)}$ ,  $\Gamma_{\mu(-)}$  представимы в виде

$$\Gamma_{\mu(+)} = \frac{1}{2}(\Gamma_\mu + \bar{\Gamma}_\mu), \Gamma_{\mu(-)} = \frac{1}{2}(\Gamma_\mu - \bar{\Gamma}_\mu), \quad (1.16)$$

$$\bar{\Gamma}_\mu = i\gamma_\mu^T \otimes \gamma_5, \Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu. \quad (1.17)$$

Выпишем перестановочные соотношения для вновь введенных матриц  $\bar{\Gamma}_\mu$ , которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\bar{\Gamma}_\mu \bar{\Gamma}_\mu + \bar{\Gamma}_\mu \bar{\Gamma}_\mu = -2\delta_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

$$\bar{\Gamma}_\mu \bar{\Gamma}_\mu + \bar{\Gamma}_\mu \bar{\Gamma}_\mu = 0. \quad (1.19)$$

Соответствующий уравнению (1.8) решеточный лагранжиан безмассового поля ДК имеет вид

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(x)(\Gamma_{\mu(+)}\nabla_{\mu(+)} + \Gamma_{\mu(-)}\nabla_{\mu(-)})\Psi(x). \quad (1.20)$$

Вводя в рассмотрение операторы  $h_{\mu(+)}$ ,  $h_{\mu(-)}$

$$h_{\mu(+)}f(x) = f(x + e_\mu), h_{\mu(-)}f(x) = f(x - e_\mu), \quad (1.21)$$

которые связаны с производными  $\nabla_{\mu(+)}$  (1.1),  $\nabla_{\mu(-)}$  (1.2) соотношениями  $\nabla_{\mu(+)} = h_{\mu(+)} + 1$ ,  $\nabla_{\mu(-)} = 1 - h_{\mu(-)}$ , перепишем лагранжиан (1.20) в форме

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}(x) \left[ \frac{1}{2}\Gamma_{\mu(+)}(h_{\mu(+)} - h_{\mu(-)}) + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}_\mu(h_{\mu(+)} + h_{\mu(-)} - 2) \right] \Psi(x), \quad (1.22)$$

удобной для исследования симметричных свойств решеточной теории ДК.

Сначала остановимся на дискретных геометрических симметриях, т. е. тех, которые затрагивают преобразование пространственных координат. К ним относятся отражение, перестановки, повороты на  $90^\circ$ , трансляции.

Операции отражения  $P_\mu$  вдоль оси  $\mu$  задаются следующим образом:

$$P_\mu e_\nu = (-1)^{\delta_{\mu\nu}} e_\nu, P_\mu h_{\mu(\pm)} = h_{\mu(\mp)} \quad (1.23)$$

(здесь и далее в п. 1 суммирования по повторяющимся индексам нет). Для инвариантности лагранжиана (1.22) относительно отражений (1.23) соответствующие преобразования функций

$$\Psi(x) \rightarrow S(P)\Psi(x), \Psi^+(x) \rightarrow \Psi^+(x)S^+(P) \quad (1.24)$$

должны удовлетворять условиям



$$S^+(P_\mu)\eta\Gamma_\mu S(P_\mu) = -\eta\Gamma_\mu, \quad (1.25)$$

$$S^+(P_\mu)\eta\Gamma_\nu S(P_\mu) = \eta\Gamma_\nu \quad (\nu \neq \mu), \quad (1.26)$$

$$S^+(P_\mu)\eta\bar{\Gamma}_\nu S(P_\mu) = \eta\bar{\Gamma}_\nu \quad (\mu = \nu, \mu \neq \nu). \quad (1.27)$$

Матрица билинейной формы  $\eta$  безмассового поля ДК в четырехмерном евклидовом континууме может быть выбрана разными способами. Зададим, например,  $\eta = I$ . Тогда соотношения (1.25) – (1.27) совместно с требованием унитарности

$$S^+(P) = S^{-1}(P) \quad (1.28)$$

однозначно приводят к следующему виду преобразования  $S(P_\mu)$  в фермионном базисе:

$$S(P_\mu) = \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5. \quad (1.29)$$

Операция перестановки  $P_{\mu\nu}$  в плоскости  $\mu\nu$  задается так:

$$P_{\mu\nu}e_\mu = e_\nu, P_{\mu\nu}e_\nu = e_\mu,$$

$$P_{\mu\nu}h_{\mu(\pm)} = h_{\nu(\pm)}, P_{\mu\nu}h_{\nu(\pm)} = h_{\mu(\pm)}. \quad (1.30)$$

Генерируемые перестановками (1.30) преобразования  $S(P_{\mu\nu})$  функций обеспечивают инвариантность лагранжиана (1.22) при выполнении условий:

$$S^+(P_{\mu\nu})\eta\Gamma_\mu S(P_{\mu\nu}) = \eta\Gamma_\nu, \quad (1.31)$$

$$S^+(P_{\mu\nu})\eta\bar{\Gamma}_\mu S(P_{\mu\nu}) = \eta\bar{\Gamma}_\nu. \quad (1.32)$$

Остальные матрицы  $\eta\Gamma, \eta\bar{\Gamma}$  при этом не изменяются, т. е.  $S^+(P_{12})\eta\Gamma_3 S(P_{12}) = \eta\Gamma_3$ . Условия (1.28), (1.31), (1.32) дают

$$S(P_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\gamma_\mu^T - \gamma_\nu^T) \otimes (\gamma_\mu - \gamma_\nu)\gamma_5. \quad (1.33)$$

Преобразования  $P_{\mu\nu}^0$  поворотов на  $90^\circ$  являются произведением перестановок и отражений:

$$P_{\mu\nu}^0 = P_{\mu\nu}P_\mu, S(P_{\mu\nu}^0) = S(P_{\mu\nu})S(P_\mu). \quad (1.34)$$

Отсюда с учетом выражений (1.29), (1.33) получаем

$$S(P_{\mu\nu}^0) = -\frac{1}{2}(\gamma_\mu^T - \gamma_\nu^T)\gamma_5 \otimes (1 - \gamma_\mu\gamma_\nu). \quad (1.35)$$

Аналогично находится вид преобразований, генерируемых трансляциями:

$$\begin{aligned} \Psi(x) \rightarrow \frac{1}{2}(\gamma_\mu^T\gamma_5 \otimes I_4 - \gamma_5 \otimes \gamma_\mu)\Psi(x) + \\ + \frac{1}{2}(\gamma_\mu^T\gamma_5 \otimes I_4 - \gamma_5 \otimes \gamma_\mu)\Psi(x + e_\mu). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Кроме пространственных симметрий, лагранжиан (1.22) инвариантен также относительно преобразования

$$\Psi(x) \rightarrow e^{i\varphi\Gamma}\Psi(x), \bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}(x)e^{i\varphi\Gamma}, \quad (1.37)$$



где матрица  $\Gamma$  имеет в используемом фермионном базисе структуру

$$\Gamma = i\gamma_5 \otimes \gamma_5. \quad (1.38)$$

Как будет показано ниже (см. п. 2), в отличие от обычной киральной симметрии, которая нарушается при введении массы, преобразование типа (1.37), (1.38) оставляет массовый член в лагранжиане инвариантным. Поэтому будем называть его кирально-подобным.

Внутренняя симметрия, присущая континуальной теории ДК, при переходе к решеточному описанию исчезает, поскольку преобразование, коммутирующее со всеми матрицами  $\Gamma_\mu, \bar{\Gamma}_\mu$  ( $\Gamma_{\mu(+)}, \Gamma_{\mu(-)}$ ), сводится к единичному.

При выборе матрицы билинейной формы в виде  $\eta = \gamma_5 \otimes \gamma_5$  операторы  $S(P_\mu), S(P_{\mu\nu})$  и  $S(P_{\mu\nu}^0)$  принимают вид:

$$S(P_\mu) = I_4 \otimes \gamma_\mu, \quad (1.39)$$

$$S(P_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\gamma_\mu^T - \gamma_\nu^T) \otimes (\gamma_\mu - \gamma_\nu)\gamma_5, \quad (1.40)$$

$$S(P_{\mu\nu}^0) = -\frac{1}{2}(\gamma_\mu^T - \gamma_\nu^T) \otimes (1 - \gamma_\mu\gamma_\nu)\gamma_5. \quad (1.41)$$

Проанализируем теперь рассмотренные симметрии с точки зрения их непротиворечивости континуальной симметрии теории ДК.

Нетрудно видеть, что преобразование (1.29) представляет собой прямое произведение известного преобразования отражения  $\gamma_\mu\gamma_5$  дираковского биспинора и дополнительного преобразования  $\gamma_5$  в подпространстве ароматов. Если же переписать оператор (1.29) в тождественной форме

$$S(P_\mu) = \gamma_\mu^T \gamma_\mu^T \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5,$$

то его можно трактовать как результат произведения оператора отражения  $\gamma_\mu^T \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5$  и одного из генераторов  $\gamma_\mu^T \otimes I_4$  преобразований группы внутренней симметрии континуального уравнения ДК. Дискретное преобразование поворотов на  $90^\circ$  (1.35) также можно рассматривать, с одной стороны, как прямое произведение преобразования поворотов  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_\mu\gamma_\nu)$  дираковского биспинора и дополнительного преобразования  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_\mu^T - \gamma_\nu^T)\gamma_5$  в пространстве ароматов, а с другой, приведя оператор (1.35) к виду

$$S(P_{\mu\nu}^0) = \frac{1}{2}(1 + \gamma_\mu^T \gamma_\nu^T)\gamma_\mu^T \gamma_5 \otimes (1 + \gamma_\mu\gamma_\nu),$$

как произведение поворотов  $\frac{1}{2}(1 + \gamma_\mu^T \gamma_\nu^T) \otimes (1 + \gamma_\mu\gamma_\nu)$  тензорного поля ДК и генераторов  $\gamma_\mu^T \gamma_5$  его группы внутренней симметрии. Аналогичное положение имеет место и для остальных симметрий, в т. ч. для (1.39) – (1.41).

Резюмируя, можно сказать, что симметрии обсуждаемой решеточной формулировки являются дискретными подгруппами алгебры  $A_R$  группы полной инвариантности континуальной теории ДК, как это и должно быть при корректном переходе от континуального описания к решеточному.

16-компонентная система (1.4), описывающая безмассовые поля ДК на решетке, распадается (редуцируется) на две 8-компонентные подсистемы (1.4а, б) и (1.4в, г). Их



континуальным аналогам присуці все необходимое геометрические симметрии (вращения, отражение и т. д.). В матричном подходе для редукции решеточного уравнения ДК надо ввести проективные операторы

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \rho), \quad (1.42)$$

где матрица  $\rho$  должна коммутировать либо антикоммутировать (последнее допустимо только в безмассовом случае) с оператором

$$\hat{K} = \Gamma_{\mu(+)} \nabla_{\mu(+)} + \Gamma_{\mu(-)} \nabla_{\mu(-)}, \quad (1.43)$$

входящим в уравнение (1.8) и лагранжиан (1.20), а ее минимальный полином должен иметь вид

$$\rho^2 - 1 = 0. \quad (1.44)$$

Как уже отмечалось выше, матрица, коммутирующая с  $\Gamma_{\mu(+)}$  и  $\Gamma_{\mu(-)}$ , кратна единичной. Поэтому остается лишь возможность отыскания матрицы антикоммутирующей с  $\hat{K}$ . С точностью до множителя она совпадает с матрицей  $\Gamma$  киральноподобных преобразований (1.37), (1.38), т. е.  $\rho = \alpha \gamma_5 \otimes \gamma_5$ . Условие (1.44) дает значение  $\alpha = \pm 1$ , и, следовательно, получаем

$$\rho = \gamma_5 \otimes \gamma_5 (\alpha = 1). \quad (1.45)$$

Матрица  $\rho$  (1.45) имеет одинаковую кратность собственных значений  $\pm 1$  (по восемь), поэтому редукция, реализуемая с помощью проективных операторов (1.42), (1.45), приводит к двум 8-компонентным системам.

Осуществим данную редукцию явно. Введем функции

$$\Psi_{\pm} = P_{\pm} \Psi, \quad \bar{\Psi}_{\pm} = \bar{\Psi} P_{\pm} \text{ при } (\Psi = \Psi_+ + \Psi_-), \quad (1.46)$$

смысл которых очевиден. Преобразуем лагранжиан (1.20):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\bar{\Psi} \hat{K} \Psi = -(\bar{\Psi}_+ + \bar{\Psi}_-) \hat{K} (\Psi_+ + \Psi_-) = \\ &= -\bar{\Psi}_+ \hat{K} \Psi_+ - \bar{\Psi}_+ \hat{K} \Psi_- - \bar{\Psi}_- \hat{K} \Psi_+ - \bar{\Psi}_- \hat{K} \Psi_-. \end{aligned} \quad (1.47)$$

В силу условия антикоммутации  $[\rho, \hat{K}]_{\pm} = 0, P_{\pm} \hat{K} = \hat{K} P_{\mp}$  первое и четвертое слагаемые в выражении (1.47) равны нулю:  $\bar{\Psi}_{\pm} \hat{K} \Psi_{\pm} = \bar{\Psi} P_{\pm} \hat{K} P_{\pm} \Psi = \bar{\Psi} \hat{K} P_{\mp} P_{\pm} \Psi = 0$ . Таким образом, лагранжиан (1.47) принимает вид

$$\mathcal{L} = -\bar{\Psi}_+ \hat{K} \Psi_- - \bar{\Psi}_- \hat{K} \Psi_+ = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (1.49)$$

т. е. он состоит из двух слагаемых  $\mathcal{L}_1 = -\bar{\Psi}_+ \hat{K} \Psi_-$  и  $\mathcal{L}_2 = -\bar{\Psi}_- \hat{K} \Psi_+$ , сопоставляемых 8-компонентным решеточным уравнениям

$$\hat{K} \Psi_- = 0, \quad (1.49)$$

$$\hat{K} \Psi_+ = 0. \quad (1.50)$$

Для установления тензорной формы редуцированных уравнений (1.49), (1.50) перейдем из фермионного базиса в базис (1.5). В результате для матрицы  $\rho$  получим выражение

$$\rho = -I_4 \otimes \gamma_5. \quad (1.51)$$



Применяя операторы (1.42), (1.51) к (1.5), приходим к заключению, что волновые функции  $\Psi_+$ ,  $\Psi_-$  (1.46) содержат такие тензорные компоненты

$$\Psi_- = \{\tilde{\varphi}_1, \varphi_1, \tilde{\varphi}_2, \varphi_2, \tilde{\varphi}_3, \varphi_3, \tilde{\varphi}_4, \varphi_4\}, \quad (1.52)$$

$$\Psi_+ = \{\varphi_{[23]}, \varphi_{[14]}, \varphi_{[31]}, \varphi_{[24]}, \varphi_{[12]}, \varphi_{[34]}, \varphi, \tilde{\varphi}\}. \quad (1.53)$$

Отсюда следует, что матричные уравнения (1.49), (1.50) действительно соответствует тензорным системам (1.4а, б), (1.4в, г).

Матричное описание рассматриваемых 8-компонентных систем позволяет без труда установить их симметричные свойства. Проективные операторы  $P_{\pm}$  (1.42), (1.45) не коммутируют с преобразованиями отражений  $S(P_{\mu})$  (1.29), поворотов на  $90^{\circ} S(P_{\mu\nu}^0)$  (1.35) и трансляций (1.36), но коммутируют с преобразованием перестановок  $S(P_{\mu\nu})$  (1.33), которое является комбинацией  $S(P_{\mu\nu}^0)$  и  $S(P_{\mu})$ . Следовательно, из геометрических симметрий, присущих 16-компонентной решеточной теории ДК, у редуцированных 8-компонентных подсистем остается только симметрия перестановок. Однако это обстоятельство не препятствует их рассмотрению в качестве самостоятельных уравнений, если при переходе в континуум необходимые геометрические симметрии восстанавливаются. Континуальные аналоги решеточных систем (1.49), (1.50) указанному условию удовлетворяют. Вместе с тем можно утверждать, что минимальная размерность диракоподобных РВУ, не приводящих к расщеплению спектра и обладающих стандартным набором симметрий на решетке, равно 16.

Обсудим еще возможность редукции 8-компонентных решеточных систем (1.4а, б) и (1.4в, г) (или (1.49), (1.50)) на 4-компонентные. Поскольку матрица  $\rho$  (1.45), антикоммутирующая с оператором  $\tilde{K}$ , является единственной, то других проективных операторов, кроме (1.42), (1.45), удовлетворяющих сформулированным выше требованиям, построить нельзя. Это означает, что обсуждаемая здесь редукция не имеет места. В то же время в континууме система уравнений ДК может быть преобразована к виду

$$\partial_{\nu}\psi_{[\mu\nu]} + \partial_{\mu}\psi = 0, \quad (1.54а)$$

$$\partial_{\nu}\varphi_{[\mu\nu]} + \partial_{\mu}\varphi = 0, \quad (1.54б)$$

$$-\partial_{\mu}\psi_{\nu} + \partial_{\nu}\psi_{\mu} + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\psi_{\beta} = 0, \quad \partial_{\mu}\psi_{\mu} = 0, \quad (1.54в)$$

$$-\partial_{\mu}\varphi_{\nu} + \partial_{\nu}\varphi_{\mu} + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\varphi_{\beta} = 0, \quad \partial_{\mu}\varphi_{\mu} = 0, \quad (1.54г)$$

означающему лоренц-инвариантное распадение безмассовой системы ДК на четыре 4-компонентные P-неинвариантные подсистемы (1.54а) – (1.54г). Причину такого несоответствия свойств 8-компонентных решеточных формулировок и их континуальных тензорных аналогов нетрудно понять, если попытаться проделать с решеточной системой (1.4) те же преобразования (они носят очевидный характер), которые приводят уравнения ДК к виду (1.54). Распадения на 4-компонентные фрагменты при этом не получится из-за того, что при функциях  $\varphi, \varphi_{\mu}, \varphi_{[\mu\nu]}$  и  $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_{\mu}, \tilde{\varphi}_{[\mu\nu]}$  в (1.4) стоят *разные* решеточные производные, т. е. у континуальных 4-компонентных уравнений (1.54а) – (1.54г) отсутствуют корректные (не приводящие к расщеплению спектра) решеточные аналоги.

Проделанный анализ позволяет провести дифференциацию внутренних степеней свободы решеточных дирак-кэлеровских фермионов. 8-компонентные уравнения (1.49) и (1.50) имеют в качестве континуальных пределов тензорные системы, не распада-



ющиеся по полной группе Лоренца. С точки зрения теории РВУ не распадающееся в лоренц-инвариантном смысле уравнение описывает единый объект. В данном случае в качестве такого объекта целесообразно рассматривать поколение частиц. Удвоенный же набор состояний, присущий каждому из нередуцируемых на решетке уравнений (1.49) и (1.50), связывается с ароматовой степенью свободы (внутри одного поколения). Таким образом, решеточное описание поля ДК естественно различает степени свободы поколений и ароматов.

Следует отметить также, что при введении массы решеточные системы (1.49), (1.50) (или (1.4а, б), (1.4в, г)), как и их континуальные тензорные аналоги, становятся зацепляющимися. Другими словами, механизм, приводящий к появлению массы у дирак-кэлеровских фермионов, требует совместного рассмотрения не только ароматов, но и поколений частиц.

Проанализируем возможность решеточного описания фермионов, опирающегося на использование в качестве исходной  $SU(2,2)$  (или  $SU(4)$ )-инвариантной безмассовой теории Дирака. Соответствующее уравнение может быть записано в виде

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi^r = 0, \quad (1.55)$$

где  $\psi^r \equiv \psi_\alpha^r$  – совокупность четырех дираковских биспиноров,  $r$  – свободный нелоренцовский (неевклидовый) индекс, пробегающий значения от 1 до 4. Развита выше процедура перехода к решеточному описанию поля ДК применима и в данном случае, поскольку она опирается, по существу, лишь на алгебраические свойства матриц  $\Gamma_\mu$ ,  $\bar{\Gamma}_\mu$  ( $\Gamma_{\mu(+)}$ ,  $\Gamma_{\mu(-)}$ ) и их размерность. Очевидно, система (1.55) допускает запись в стандартной матричной форме в базисе

$$\psi_\alpha^r = \{\psi_\alpha^1, \psi_\alpha^{\dot{1}}, \psi_\alpha^2, \psi_\alpha^{\dot{2}}, \psi_\alpha^3, \psi_\alpha^{\dot{3}}, \psi_\alpha^4, \psi_\alpha^{\dot{4}}\}, \quad (1.56)$$

где  $\psi_\alpha$ ,  $\psi^{\dot{\alpha}}$  – двухкомпонентные спиноры. Тогда, повторяя выкладки, проделанные для уравнения ДК, мы приходим к решеточной формулировке 16-компонентной теории Дирака, в точности совпадающей с (1.8), (1.16), (1.17). Ее симметричные свойства не будут отличаться от свойств решеточной теории ДК, поскольку вид операторов симметрий определяется условиями (1.25) – (1.27), (1.31), (1.32) однозначно. Сказанное означает, что между решеточными реализациями обсуждаемых континуальных полевых систем нет никакой разницы, т. е. фактически надо говорить об *одной* 16-компонентной свободной безмассовой решеточной системе и двух ее возможных континуальных интерпретациях – тензорной (поле ДК) и спинорной (16-компонентная теория Дирака).

Несколько иная картина получается, если обратиться к редуцированным 8-компонентным уравнениям (1.49), (1.50). Установим их континуальные аналоги, подразумеваемая спинорную интерпретацию. В базисе (1.56) развернутая блочная структура матрицы  $\rho$  (1.45) такова:

$$\rho = \text{diag}(I_2, -I_2, I_2, -I_2, -I_2, I_2, -I_2, I_2). \quad (1.57)$$

Сравнивая выражения (1.56) и (1.57), заключаем, что волновые функции  $\Psi_+$ ,  $\Psi_-$ , выделяемые из (1.56) проективными операторами  $P_\pm$  (1.42), (1.45), содержат следующие спинорные компоненты:

$$\Psi_+ = \{\psi_\alpha^1, \psi_\alpha^2, \psi_\alpha^{\dot{3}}, \psi_\alpha^{\dot{4}}\}, \quad \Psi_- = \{\psi_\alpha^{\dot{1}}, \psi_\alpha^{\dot{2}}, \psi_\alpha^3, \psi_\alpha^4\}.$$



Следовательно спинорные континуальные аналоги редуцированных решеточных систем (1.49), (1.50) имеют, вид

$$\begin{aligned}\partial^{ab}\psi_b^1 &= 0, \partial^{ab}\psi_b^2 = 0, \\ \partial_{ab}\psi^{b3} &= 0, \partial_{ab}\psi^{b4} = 0,\end{aligned}\tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}\partial_{ab}\psi^{b1} &= 0, \partial_{ab}\psi^{b2} = 0, \\ \partial^{ab}\psi_b^3 &= 0, \partial^{ab}\psi_b^4 = 0.\end{aligned}\tag{1.59}$$

Системы (1.58), (1.59) P-сопряжены друг другу, а значит, каждая из них не является инвариантной относительно отражений. Другими словами, в рамках спинорной интерпретации симметрия отражений у редуцированных 8-компонентных систем в континуальном пределе не восстанавливается, т. е. такая интерпретация не дает возможности различать степени свободы поколений и ароматов. Разумеется, можно переопределить операцию отражения в континууме так, чтобы системы (1.58), (1.59) стали P-инвариантными, но это приведет к нарушению негеометрического статуса индекса  $g$ , поскольку компоненты волновой функции, отвечающие различным его значениям, будут перемешиваться этими преобразованиями.

## 2. Матричная формулировка тензорных обобщений уравнения Дирака – Кэлера в решеточном пространстве и геометрические фермионы

Рассмотренная в предыдущем параграфе процедура записи на решетке диракоподобных РВУ и применительно к антисимметричным тензорным полям в точности соответствующая правилу, полученному в [4] из чисто геометрических соображений, носит достаточно универсальный характер. Использование матричного подхода позволяет распространить ее на некоторые другие поля, для которых алгоритм, сформулированный в [4], не срабатывает. В частности, она применима к 32- и 48-компонентной тензорным полевым системам, возникающим при максимальном алгебраическом обобщении уравнения ДК, ограниченном размерностью пространства-времени.

Здесь мы для удобства будем пользоваться видоизмененным фермионным базисом, отличающимся порядком расположения компонентов волновой функции так, чтобы матрицы  $\Gamma_\mu$  имели вид

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes I_{4n} = \gamma_\mu \otimes I_4 \otimes I_n \quad (n = 2, 3),\tag{2.1}$$

где  $n = 2$  отвечает 32-компонентной и  $n = 3$  – 48-компонентной системе. В этом базисе для матрицы  $\eta$  вместо получаем структуру

$$\eta = \gamma_\mu \otimes \gamma_5 \otimes I_n.\tag{2.2}$$

Следуя рецепту, используемому в предыдущем параграфе для поля ДК, введем четверку матриц

$$\bar{\Gamma}_\mu = i\gamma_5 \otimes \gamma_\mu \otimes I_n,\tag{2.3}$$

удовлетворяющую перестановочным соотношениям (1.18), (1.19). Затем по формулам (1.16) составим линейные комбинации  $\Gamma_{\mu(+)}$ ,  $\Gamma_{\mu(-)}$ , для которых выполняются соотношения (1.10), (1.11), и построим с их помощью уравнение вида (1.8) и лагранжиан (1.20). Это и будет матричная формулировка обсуждаемых полей в решеточном пространстве.



Доказательство отсутствия расщепления спектра проводится точно так же, как и в случае уравнения ДК. Явную тензорную форму полученных таким образом решеточных систем мы не приводим ввиду ее громоздкости. (Для этого потребуется покомпонентная запись 16п уравнений, поскольку тензоры  $\varphi_{\mu[\alpha\beta]}$ ,  $\varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$ ,  $\Phi_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$  и т. д. не принадлежат полному набору антисимметричных тензорных полей и, как следствие, решеточные производные  $\nabla_{\mu(+)}$ ,  $\nabla_{\mu(-)}$  сопрягаются не с «чистыми» компонентами этих тензоров, а с их линейными комбинациями).

Установим свойства симметрии наших решеточных уравнений. Прежде всего отметим, что в отличие от поля ДК они обладают внутренней симметрией, преобразования которой в используемом фермионном базисе имеют вид

$$Q = I_{16} \otimes q_n, \quad (2.4)$$

где  $q_n$  – произвольная унитарная матрица размерности  $n \times n$ . Преобразования (2.4) образуют группу  $SU(n)$  ( $U(n)$  с учетом фазовых преобразований) и не зависят от выбора матрицы билинейной формы, т. е. от характера (компактная или некомпактная) группы внутренней симметрии континуального эквивалента теории.

Преобразования  $S(P_\mu)$ , удовлетворяющие условиям типа (1.23) – (1.27) и оставляющие инвариантным лагранжиан (1.20) при отражениях, задаются матрицами

$$S(P_\mu) = \gamma_\mu \gamma_5 \otimes \gamma_5 \otimes \alpha. \quad (2.5)$$

Для операторов  $S(P_{\mu\nu})$ , сопоставляемых перестановкам и подчиняющихся условиям (1.31), (1.32), получается выражение

$$S(P_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\gamma_\mu - \gamma_\nu)\gamma_5 \otimes (\gamma_\mu - \gamma_\nu) \otimes \beta. \quad (2.6)$$

Операторы поворотов на  $90^\circ$   $S(P_{\mu\nu}^0)$  с учетом связи (1.34) определены следующим образом:

$$S(P_{\mu\nu}^0) = -\frac{1}{2}(1 + \gamma_\mu \gamma_\nu) \otimes (\gamma_\mu - \gamma_\nu)\gamma_5 \otimes \beta\alpha. \quad (2.7)$$

Симметрия трансляций описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\rightarrow \frac{1}{2}(I_4 \otimes \tau_\mu - \gamma_\mu \otimes \tau_5)\Psi(x) + \\ &+ \frac{1}{2}(I_4 \otimes \tau_\mu + \gamma_\mu \otimes \tau_5)\Psi(x + e_\mu), \end{aligned} \quad (2.8a)$$

$$\tau_\mu = \gamma_\mu \gamma_5 \otimes \tau, \quad \tau_5 = \gamma_5 \otimes \tau. \quad (2.8b)$$

В формулах (2.5) – (2.8)  $\alpha, \beta, \tau$  – некоторые унитарные матрицы размерности  $n \times n$ . Их появление отражает присущую решеточной формулировке теории внутреннюю симметрию, преобразования которой действуют в том же подпространстве, что и матрицы  $\alpha, \beta, \tau$ . Поэтому для собственно преобразований пространственных симметрий можно, не уменьшая общности, положить

$$\alpha = \beta = \tau = I_2. \quad (2.9)$$

При выборе матрицы билинейной формы способом (2.2) для преобразования отражений, перестановок и поворотов на  $90^\circ$  получаются выражения



$$S(P_\mu) = \gamma_\mu \otimes I_{4n}, \quad (2.10)$$

$$S(P_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\gamma_\mu - \gamma_\nu)\gamma_5 \otimes (\gamma_\mu - \gamma_\nu) \otimes I_n, \quad (2.11)$$

$$S(P_{\mu\nu}^0) = -\frac{1}{2}(1 + \gamma_\mu\gamma_\nu)\gamma_5 \otimes (\gamma_\mu - \gamma_\nu) \otimes I_n. \quad (2.12)$$

Подчеркнем, что преобразования пространственных (2.5) – (2.12) и внутренней (2.4) симметрий на решетке действуют в ортогональных подпространствах и, следовательно, коммутируют между собой, в то время как их континуальные тензорные аналоги образуют полупрямое произведение.

И, наконец, киральноподобная симметрия. Матрица, антикоммутирующая с  $\Gamma_\mu$  (2.1) и  $\bar{\Gamma}_\mu$  (2.3), в общем случае такова:

$$\Gamma = \gamma_5 \otimes \gamma_5 \otimes t, \quad (2.13)$$

где  $t$  – произвольная матрица  $n \times n$ . В евклидовом пространстве лагранжиан (1.20) (или (1.22)) инвариантен относительно преобразований вида (1.37) при условии, что матрица  $\Gamma$  – антиэрмитовская. Это означает, что на матрицу  $t$  в (2.13) также накладывается требование антиэрмитовости.

Проанализируем теперь установленные решеточные симметрии с точки зрения их соответствия симметриям континуальной теории. Напомним, что используемый нами фермионный базис предполагает разложение  $R_{16n} = R_4 \otimes R_{4n}$  пространства  $R_{16n}$  представления волновой функции  $\Psi$ , где  $R_4$  – подпространство дираковского биспинора,  $R_{4n}$  – подпространство представления  $(0, \frac{3}{2}) \otimes (\frac{3}{2}, 0)$  в случае  $n = 2$  и  $(\frac{1}{2}, 1) \otimes (1, \frac{1}{2})$  при  $n = 3$ . Возьмем, например, преобразования поворотов (2.7) и, учитывая (2.9), перепишем их в тождественной форме

$$S(P_{\mu\nu}^0) = -\frac{1}{2}(1 + \gamma_\mu\gamma_\nu) \otimes \Lambda_{\mu\nu}\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\gamma_\mu - \gamma_\nu)\gamma_5 \otimes I_n, \quad (2.14)$$

где  $\Lambda_{\mu\nu} \otimes I_n$  – континуальные преобразования евклидовых вращений в подпространстве  $R_{4n}$ , отвечающие повороту на  $90^\circ$ . (В данной связи заметим, что, во-первых, по отношению к группе  $SO(4)$  лоренцевские представления  $(0, \frac{3}{2})$  и  $(\frac{3}{2}, 0)$ , а также  $(\frac{1}{2}, 1)$  и  $(1, \frac{1}{2})$  неразличимы и, во-вторых, матрицы  $\Lambda_{\mu\nu}$  являются унитарными, поскольку конечномерные представления группы  $SO(4)$  унитарны). Оператор (2.14) можно рассматривать как произведение унитарных операторов  $J(P_{\mu\nu}^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_\mu\gamma_\nu) \otimes \Lambda_{\mu\nu} \otimes I_n$  и  $G_{\mu\nu} = I_4 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_{\mu\nu}^{-1}(\gamma_\nu - \gamma_\mu)\gamma_5 \otimes I_n$ . Первый из них соответствует евклидовым поворотам на  $90^\circ$  в непрерывном пространстве  $R_{16n}$ , а второй содержится среди преобразований группы внутренней симметрии континуальной теории, имеющих с учетом определения (2.1) вид  $Q = I_4 \otimes q_{16n}$ , где  $q_{16n}$  – произвольная унитарная матрица размерности  $16n \times 16n$ . Другими словами, решеточные преобразования (2.7) «вписываются» в качестве дискретной подгруппы в группу полной инвариантности исходной тензорной формулировки, как это и должно быть при корректном переходе к непрерывному пределу.

Однако допустима и иная трактовка предельного перехода в континуум. Оператор (2.7) при учете (2.9) может рассматриваться как прямое произведение преобразова-



ний  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_\mu \gamma_\nu)$  евклидовых поворотов на  $90^\circ$  в («фермионном») подпространстве  $R_4$  дираковского биспинора и преобразований  $g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_\nu - \gamma_\mu)\gamma_5 \otimes I_2$  ( $g_{\mu\nu}^+ = g_{\mu\nu}^{-1}$ ), заданных в подпространстве  $R_{4n}$ , которое интерпретируется уже как пространство свободного нелоренцевского (неевклидового) индекса  $A$  ( $A = 1 \div 4n$ ), приписанного волновой функции уравнения Дирака. Это означает, что преобразования (2.1) могут выступать в качестве дискретной подгруппы группы полной симметрии  $SU(4n)$  – инвариантной теории Дирака.

Аналогичная ситуация справедлива и для остальных симметрий решеточной формулировки (1.8), (1.22), (2.1), (2.3), которая, следовательно, имеет два непрерывных предела – тензорный и дираковский ( $16n$ -компонентная теория Дирака). Полученный результат дает основание интерпретировать обсуждаемые тензорные системы в качестве моделей геометризованного описания фермионов в решеточном пространстве.

Дальнейшее развитие предлагаемой решеточной теории возможно на основе следующих двух подходов:

1) поскольку модель предназначена для описания дираковских частиц, можно «забыть» о ее тензорном происхождении и на последующих этапах (ведение взаимодействия, массы, вторичное квантование и т. д.) исходить из необходимости существования лишь дираковского предела; в этом случае тензорные системы ( $\kappa = 0$ ) рассматриваются лишь в качестве геометрической основы свободной модели;

2) на различных этапах построения решеточной теории сохраняется ее двойственная трактовка, т. е. предполагается существование обоих пределов: дираковского и тензорного. Очевидно, что такой подход налагает определенные ограничения на структуру модели, ее физические следствия и является более последовательной реализацией идеи геометризованного описания решеточных фермионов.

Проанализируем с точки зрения второго подхода трактовку внутренних степеней свободы фермионов, описываемых исследуемыми решеточными системами. Для этого введем в рассмотрение проективные операторы  $P_\pm$  согласно определению (1.42), где

$$\rho = \gamma_5 \otimes \gamma_5 \otimes I_n. \quad (2.15)$$

Матрица  $\rho$  (2.15) коммутирует с преобразованиями перестановок (2.6) и антикоммутирует с матрицами  $\Gamma_\mu$  (2.1) и  $\bar{\Gamma}_\mu$  (2.3) и, следовательно, с оператором  $\bar{K}$  (1.43), входящим в лагранжиан (1.20). Подействуем на волновую функцию  $\Psi$  проективными операторами (1.42), (2.15) ( $\Psi_\pm = P_\pm \Psi$ ) и аналогично тому, как это делалось в случае поля ДК, преобразуем решеточный лагранжиан к форме (1.48). С помощью указанных операторов исходная  $16n$ -компонентная система редуцируется на две  $8n$ -компонентные подсистемы вида (1.49), (1.50), каждая из которых обладает симметрией перестановок, а также киральноподобной и  $SU(n)$ -внутренней симметриями. Справедливость последнего утверждения вытекает из того, что матрица  $\rho$  (2.15) коммутирует с преобразованиями (1.37), (2.13) и (2.4).

Для установления аналогов полученных таким способом  $8n$ -компонентных решеточных уравнений в непрерывном пределе обратимся к исходным тензорным системам. Первая из них в безмассовом случае ( $\kappa \rightarrow 0$ ) распадается на подсистемы

$$\partial_\nu \varphi_{\nu[\alpha\beta]} = 0,$$



$$\frac{1}{2}(-\partial_\mu \varphi_{\nu[\alpha\beta]} + \partial_\nu \varphi_{\mu[\alpha\beta]} - \partial_\alpha \varphi_{\beta[\mu\nu]} + \partial_\beta \varphi_{\alpha[\mu\nu]} + i\varepsilon_{\mu\nu\eta\xi} \partial_\eta \varphi_{\xi[\alpha\beta]} + i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\xi} \partial_\eta \varphi_{\xi[\mu\nu]}) = 0 \quad (2.16a)$$

и

$$\partial_\nu \varphi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} + \frac{1}{2}(\partial_\beta \varphi_{[\alpha\mu]} - \partial_\alpha \varphi_{[\beta\mu]} + \delta_{\mu\alpha} \partial_\nu \varphi_{[\nu\beta]} - \delta_{\mu\beta} \partial_\nu \varphi_{[\nu\alpha]}) + i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\nu} \partial_\eta \varphi_{[\nu\mu]} = 0 \quad (2.17a)$$

плюс аналогичные уравнения для тензоров  $\check{\varphi}_{\mu[\alpha\beta]}$ ,  $\check{\varphi}_{\mu[\alpha\beta]}$ ,  $\check{\varphi}_{\mu[\alpha\beta]}$  (обозначим их, не выписывая, через (2.16б), (2.17б)). Вторая распадается (при  $\kappa \rightarrow 0$ ) следующим образом:

$$\partial_\nu \Phi_{[\alpha\nu][\alpha\beta]} + \partial_\alpha \Phi_{[\alpha\beta]} = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu \Phi_{[\mu\nu][\alpha\beta]} + \partial_\mu \Phi_{[\alpha\beta]} - \frac{1}{3}(\delta_{\mu\alpha} \partial_\eta \Phi_{[\eta\beta]} - \\ - \delta_{\mu\beta} \partial_\eta \Phi_{[\eta\alpha]} + \delta_{\mu\alpha} \partial_\nu \Phi_{[\eta\nu][\eta\beta]} - \delta_{\mu\beta} \partial_\nu \Phi_{[\eta\nu][\eta\alpha]} + \\ + i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} \partial_\nu \Phi_{[\eta\nu][\eta\rho]} + i\varepsilon_{\mu\alpha} \partial_\eta \Phi_{[\eta\rho]}) = 0, \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$\partial_\lambda \Phi_{\lambda[\alpha\beta]} + \frac{1}{3}(\partial_\alpha \Phi_\beta - \partial_\beta \Phi_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} \partial_\lambda \Phi_\rho) = 0,$$

$$\begin{aligned} -\partial_\eta \Phi_{\nu[\eta\beta]} + \frac{1}{3}(2\partial_\nu \Phi_\beta + 2\partial_\beta \Phi_\nu - \delta_{\nu\beta} \partial_\rho \Phi_\rho) - \\ - i\varepsilon_{\rho\nu\eta\xi} \partial_\eta \Phi_{\xi[\rho\beta]} = 0 \end{aligned} \quad (2.19a)$$

и также плюс аналогичные уравнения (2.18б), (2.19б) для  $\check{\Phi}_{[\alpha\beta]}$ ,  $\check{\Phi}_{[\mu\nu][\alpha\beta]}$ ,  $\check{\Phi}_{\lambda[\alpha\beta]}$ ,  $\check{\Phi}_\alpha$ .

Переходя из фермионного базиса в тензорный, можно убедиться, что проективные операторы  $P_\pm$  (1.42), (2.15) при  $n = 2$  лоренц- и P-инвариантным образом выделяют подсистемы (2.16), (2.17), а при  $n = 3$  – подсистемы (2.18), (2.19), которые и являются континуальными тензорными эквивалентами наших  $8n$ -компонентных решеточных систем.

Редукция последних на уравнения меньшей размерности не допускается в том смысле, что в тензорном пределе системы (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) не распадаются по полной группе Лоренца. Невозможность такого распада вытекает из анализа схем зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца, соответствующих безмассовым РВУ (2.16) – (2.19). Следовательно, в рамках развиваемого подхода каждая из  $8n$ -компонентных решеточных систем описывает одно поколение фермионов. При этом важно подчеркнуть, что калибровочная симметрия имеет здесь геометрическое происхождение и не обусловлена введением в теорию свободного индекса нелоренцевского типа, как это делается в общепринятом подходе.

В заключение отметим тот существенный, хотя и очевидный момент, что редукция исходных 32- и 48-компонентной решеточных систем, осуществляемая посредством проективных операторов (1.42), (2.15), носит релятивистски-инвариантный характер и в смысле дираковского предела, поскольку эти операторы коммутируют с лоренцевскими генераторами  $16n$ -компонентной теории Дирака, имеющими в используемом фермионном базисе структуру  $J = \frac{1}{4}\gamma_\mu\gamma_\nu \otimes I_{4n}$ .



### 3. Геометризованное введение массы и калибровочного взаимодействия в решеточной модели

Обсудим с позиций, изложенных в предыдущем пункте, вопрос о введении массы в теорию. Чтобы включить в единую схему наряду с 32- и 48-компонентной системами также и поле ДК, будем полагать в формулах (2.1) – (2.4) и других  $n = 1, 2, 3$ , где значение  $n = 1$  соответствует полю ДК. Модель двух поколений, с которой мы имеем дело, предполагает возможность получения по крайней мере двух масс. Однако, вводя в безмассовую систему только диагональные массовые члены, два значения массы получить нельзя. Аналогичная ситуация характерна и для систем (2.16а) – (2.17б) и (2.18а) – (2.18б). Так, например, при добавлении в уравнения (2.16а), (2.16б) членов  $m_1 \varphi_{[\alpha\beta]}$ ,  $m_1 \varphi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ ,  $m_1 \check{\varphi}_{[\alpha\beta]}$ ,  $m_1 \check{\varphi}_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ , а в (2.17а), (2.17б) –  $m_2 \varphi_{\mu[\alpha\beta]}$ ,  $m_2 \check{\varphi}_{\mu[\alpha\beta]}$  получается система, которая описывает тензорное поле с одной массой  $m = \sqrt{m_1 m_2}$ , а не с двумя –  $m_1, m_2$ . Поэтому для сохранения (наряду с дираковским) непрерывного тензорного предела вводить массу в рассматриваемые модели следует недиагональным способом.

Возьмем один из лагранжианов, содержащихся в (1.48), например,  $\mathcal{L} = -\bar{\Psi}_+ \hat{K} \Psi_-$  и запишем его в форме

$$\mathcal{L}_1 = -\bar{\Psi}_+ \left[ \frac{1}{2} \Gamma_\mu (h_{\mu(+)} - h_{\mu(-)}) + \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_\mu (h_{\mu(+)} - h_{\mu(-)}) - \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu \right] \Psi_-, \quad (3.1)$$

где явно выделен член  $\bar{\Psi}_+ \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu \Psi_-$  типа массового.

Заменим этот член на  $\bar{\Psi}_+ C_1 \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu \Psi_-$  ( $C_1$  – положительное число, большее единицы). В результате вместо  $\mathcal{L}_1$  (3.1) получается выражение

$$\mathcal{L}'_1 = -\bar{\Psi}_+ [\hat{K} + (1 - C_1) \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu] \Psi_-. \quad (3.2)$$

Возведем в квадрат решеточный оператор  $\hat{K} + (1 - C_1) \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu$ , содержащийся в (3.2):

$$\begin{aligned} [\hat{K} + (1 - C_1) \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu]^2 &= \hat{K}^2 + (1 - C_1)(\hat{K} \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu + \\ &+ \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu \hat{K}) + (1 - C_1)^2 (\sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В п. 1. было показано, что

$$\hat{K} = \nabla_{\mu(+)} \nabla_{\mu(-)}. \quad (3.4)$$

Из определения (2.3) матриц  $\bar{\Gamma}_\mu$  следует справедливость равенства

$$(\sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu)^2 = -4. \quad (3.5)$$

Используя перестановочные соотношения (1.18), (1.19), упростим антикоммутатор  $\hat{K} \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu + \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu \hat{K}$ , фигурирующий в (3.4):

$$\begin{aligned} \hat{K} \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu + \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu \hat{K} &= \sum_\nu \left[ \frac{1}{2} \Gamma_\nu (h_{\nu(+)} + h_{\nu(-)}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_\nu (h_{\nu(+)} + h_{\nu(-)} - 2) \right] \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu + \sum_\mu \bar{\Gamma}_\mu \sum_\nu \left[ \frac{1}{2} \Gamma_\nu (h_{\nu(+)} + h_{\nu(-)}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_\nu (h_{\nu(+)} + h_{\nu(-)} - 2) \right] = \frac{1}{2} \sum_\nu \sum_\mu [(\Gamma_\nu \bar{\Gamma}_\mu + \bar{\Gamma}_\mu \Gamma_\nu) (h_{\nu(+)} + h_{\nu(-)}) + \\ &+ (\bar{\Gamma}_\nu \bar{\Gamma}_\mu + \bar{\Gamma}_\mu \bar{\Gamma}_\nu) (h_{\nu(+)} + h_{\nu(-)} - 2)] = -\sum_\mu (h_{\mu(+)} + h_{\mu(-)} - 2). \end{aligned}$$



С учетом определений (1.1), (1.2) и (1.21) можно проверить, что  $\sum_{\mu}(h_{\mu(+)} + h_{\mu(-)} - 2) = \nabla_{\mu(+)}\nabla_{\mu(-)}$  и, следовательно,

$$\hat{K}\sum_{\mu}\bar{\Gamma}_{\mu} + \sum_{\mu}\bar{\Gamma}_{\mu}\hat{K} = -\nabla_{\mu(+)}\nabla_{\mu(-)}. \quad (3.6)$$

Если проделать аналогичную процедуру с  $\mathcal{L}_2 = -\bar{\Psi}_-\hat{K}\Psi_+$ , то в итоге придем к лагранжиану  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}'_2$ , который описывает решеточную полеую систему с двумя массами  $m_i = 2(c_i - 1)/\sqrt{c_i}$  ( $i = 1, 2$ ).

Вводимые в редуцированный лагранжиан (1.48) недиагональные члены  $(1 - c_i)\sum_{\mu}\bar{\Gamma}_{\mu}$  коммутируют с пространственными преобразованиями перестановок  $S(P_{\mu})$ , которые, в свою очередь, коммутируют с проективными операторами  $P_{\pm}$  (1.42), (2.15), осуществляющими данную редукцию. Поэтому при используемом нами способе введения масс(ы) симметрия перестановок, свойственная безмассовой теории сохраняется. Сохраняются также киральноподобная и  $SU(n)$ -внутренняя симметрии. Инвариантность же теории относительно преобразований отражений и поворотов на  $90^\circ$  здесь нарушается, что является, однако, допустимым при условии, если при переходе в континуум необходимые пространственные симметрии восстанавливаются. Например, для уравнения ДК ( $n = 1$ ) предложенный способ введения масс приводит к решеточной полеой системе

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_1}\nabla_{\nu(-)}\varphi_{[\mu\nu]} + \frac{1}{m_2}\nabla_{\mu(+)}\varphi + \varphi_{\mu} &= 0, \\ \frac{1}{m_2}\nabla_{\nu(+)}\tilde{\varphi}_{[\mu\nu]} + \frac{1}{m_1}\nabla_{\mu(-)}\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_{\mu} &= 0, \\ \frac{1}{m_1}(-\nabla_{\mu(-)}\varphi_{\nu} + \nabla_{\nu(+)}\varphi_{\mu}) + \frac{1}{m_2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\nabla_{\alpha(-)}\tilde{\varphi}_{\beta} + \varphi_{[\mu\nu]} &= 0, \\ \frac{1}{m_2}\nabla_{\mu(-)}\varphi_{\mu} + \varphi = 0, \frac{1}{m_1}\nabla_{\mu(+)}\tilde{\varphi}_{\mu} + \tilde{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ее континуальный аналог получающийся из (3.7) путем замен  $\nabla_{\mu(+)} \rightarrow \partial_{\mu}$ ,  $\nabla_{\mu(-)} \rightarrow \partial_{\mu}$ , совпадает с оригиналом, если положить  $m_1 = \kappa$ ,  $m_2 = \frac{\kappa}{\lambda}$ , и инвариантен относительно преобразований полной группы Лоренца.

Аналогичная картина имеет место также для 32- и 48-компонентного обобщений поля ДК. Явные выражения для соответствующих двумассовых тензорных систем мы приводить не будем ввиду их громоздкости.

С точки зрения дираковской интерпретации используемый здесь недиагональный способ введения масс(ы) приводит к модели с перемешиванием ароматов, что является еще одной характерной особенностью предлагаемого геометризованного подхода к описанию фермионов на решетке.

И, наконец, затронем кратко вопрос о калибровочном взаимодействии в рассматриваемой модели. В обычном подходе, основанном на использовании в качестве исходного уравнения Дирака и внутренних степеней свободы нелоренцевского (неевклидового) происхождения, введение взаимодействия в решеточный лагранжиан осуществляется путем замены операторов  $h_{\mu(\pm)}$  на калибровочно-ковариантные операторы  $H_{\mu(\pm)}$ :

$$\begin{aligned} h_{\mu(+)}\Psi(x) - H_{\mu(+)}\Psi(x) &= U_{\mu}(x)\Psi(x + e_{\mu}), \\ h_{\mu(-)}\Psi(x) - H_{\mu(-)}\Psi(x) &= U_{\mu}^+(x + e_{\mu})\Psi(x + e_{\mu}), \end{aligned} \quad (3.8)$$



где  $U_\mu(x) = \exp\{ig \int_x^{x+e_\mu} B_\mu(\xi) d(\xi)\}$  – реберная переменная (ребро характеризуется координатой  $x$  его начала и направлением  $\mu$ ),  $B_\mu = B_\mu^\alpha t^\alpha$ ,  $B_\mu^\alpha$  – потенциалы калибровочного поля континуальной теории,  $t^\alpha$  – генераторы фундаментального представления калибровочной группы. В случае когда калибровочная группа  $SU(n)$  имеет геометрическое происхождение, данный прием остается в силе, если преобразования этой группы и преобразования дискретных решеточных симметрий действуют в ортогональных подпространствах (сравним (2.4) с (2.5) – (2.12)). Кроме того, поскольку матрицы  $U_\mu(x)$  коммутируют с проективными операторами  $P_\pm$  (1.42), (2.15), замены типа (3.8) справедливы и тогда, когда операторы  $h_{\mu(\pm)}$  действуют на волновые функции  $\Psi_\pm = P_\pm \Psi$ . Осуществляя в редуцированных лагранжианах  $\mathcal{L}_{1,2}$  (1.48) подстановки (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,2}^{int} = & -\bar{\Psi}_\pm(x) \Gamma_{\mu(+)} U_\mu(x) \Psi_\mp(x + e_\mu) + \\ & + \bar{\Psi}_\pm(x) \Gamma_{\mu(-)} U_\mu^+(x - e_\mu) \Psi_\mp(x - e_\mu) + \bar{\Psi}_\pm(x) \Sigma_\mu \bar{\Gamma}_\mu \Psi_\mp(x), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где верхние (нижние) знаки у функций  $\bar{\Psi}_\pm$ ,  $\Psi_\mp$  соответствуют индексу 1 (2) у лагранжиана. Выражение (3.9) показывает, что калибровочное взаимодействие не связывает между собой поля  $\bar{\Psi}_+$  с  $\Psi_+$  и  $\bar{\Psi}_-$  с  $\Psi_-$ . Данное обстоятельство может оказаться существенным с точки зрения динамических следствий в квантовой формулировке теории.

### Заключение

Развиваемый в данной работе геометризованный подход к описанию фермионов в решеточном пространстве обладает рядом достоинств. Перечислим их.

Во-первых, он свободен от трудностей с расщеплением спектра, которые имеют место в решеточных моделях, основанных на уравнении Дирака, и обусловлены негеометрическим характером понятия спинора.

Во-вторых, дает возможность, не используя симметрии нелоренцевского происхождения, описывать с единых позиций степени свободы ароматов, поколений и калибровочных взаимодействий, различая их естественным образом: выделение поколений происходит в результате редукции безмассовой модели на подсистемы, имеющие релятивистски-инвариантные тензорные аналоги в континууме; специфика калибровочной симметрии состоит в том, что она «выживает» и на решетке в отличие от других внутренних симметрий континуальной теории.

Базируясь на тензорных полевых системах, возникающих при максимальном алгебраическом обобщении уравнения ДК, ограниченном размерностью пространства – времени, данный подход приводит к  $SU(2)$ - и  $SU(3)$ -калибровочным взаимодействиям, которые тем самым оказываются геометрически выделенными в пространстве размерности  $d = 4$ .

Требование сохранения в непрерывном пределе тензорной интерпретации модели (наряду с дираковской) при наполнении ее динамическим содержанием накладывает ограничения на структуру теории и возможные физические следствия, обуславливая, в частности, недиагональный способ введения массовых членов и перемешивания ароматов.

Используемая процедура записи на решетке уравнения ДК и его обобщений может быть распространена на другие полевые системы с дираковской алгеброй матриц  $\Gamma_\mu$ , размерность которых кратна 16.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.
2. Susskind, L. Lattice fermions / L. Susskind // Phys. Rev. – 1977. – Vol. D16, Nr 10. – P. 3031–3039.
3. Becher, P. The Dirak – Köhler equations and fermions on the lattice / P. Becher, H. Joos // Z. Phys. – 1982. – Vol. C15. – P. 343–361.
4. Rabin, J. M. Perturbation theory for undoubled lattice fermions / J. M. Rabin // Phys. Rev. – 1981. – Vol. D24, Nr 12. – P. 3218–3236.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 04.09.2020*



УДК 524.354.6-33

**Владимир Станиславович Секержицкий<sup>1</sup>, Алексей Игоревич Серый<sup>2</sup>**  
*<sup>1,2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*  
**Vladimir Sekerzhitsky<sup>1</sup>, Alexey Sery<sup>2</sup>**  
*<sup>1,2</sup>PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
of Brest State A. S. Pushkin University*  
e-mail: svb@brsu.brest.by

## О ПОЛЯРИЗАЦИИ КРАЙНЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ФЕРМИ-ГАЗОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Исследовано влияние сильного магнитного поля на поляризацию крайне вырожденных идеальных нерелятивистских нейтронного, электронного и протонного газов. Показано, что критерий полной поляризации для электронов совпадает с критерием квантового предела сверхсильного магнитного поля, а для протонов критерий квантового предела более жесткий, чем критерий полной поляризации.*

### On the Polarization of Extremely Degenerate Ideal Fermi-Gases in Magnetic Field

*The influence of strong magnetic field on the polarization of extremely degenerate ideal nonrelativistic neutron, electron and proton gases is investigated. It is shown that the total polarization criterion for electrons coincides with the criterion of the quantum limit of super strong magnetic field, and for protons the criterion of the quantum limit is tougher than the total polarization criterion.*

1. Как известно из учебной и научной литературы по термодинамике и статистической физике [1; 2], для крайне вырожденного нерелятивистского ферми-газа понятие «энергия Ферми» означает как максимальную полную, так и максимальную кинетическую энергии фермиона, численно равные химическому потенциалу. Если магнитное поле отсутствует, то данное утверждение возражений не вызывает. Однако для системы фермионов в магнитном поле положение существенно меняется.

Рассмотрим идеальный парамагнитный ферми-газ (например, нейтронный при достаточной для стабильности нейтронов концентрации электронов сверхплотного вещества) при температуре абсолютного нуля в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией  $B$ . Полная (с точностью до слагаемого  $m_n c^2$ ) энергия нейтрона с собственным магнитным моментом  $\mu_n$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{nk} + 2s\mu_n B, \quad (1)$$

где кинетическая энергия  $\varepsilon_{nk} = \frac{p_n^2}{2m_n}$ ,  $p_n$  и  $m_n$  – импульс и масса нейтрона,  $s = \mp 1/2$ .

При этом химический потенциал (в данном случае максимальная полная энергия, отсчитываемая от  $m_n c^2$ )

$$\zeta_n(B) = \tau_{n\uparrow} - \mu_n B = \tau_{n\downarrow} + \mu_n B, \quad (2)$$

$\tau_{n\uparrow}$  и  $\tau_{n\downarrow}$  – максимальные кинетические энергии нейтронов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю. Соответствующие графики зависимости  $\varepsilon_n$  от  $p_n$  имеют вид ветвей параболы, вдоль которых распре-



делены квантовые состояния. В отсутствие магнитного поля заполнение квантовых состояний нейтронами с магнитными моментами, параллельными и антипараллельными полю, одинаково (рисунок 1а, сплошные линии). В магнитном поле обе ветви параболы смещаются друг относительно друга на величину  $2\mu_n B$  (рисунок 1б). При этом нарушается энергетическая равноправность обеих ориентаций магнитных моментов и в соответствии с принципом запрета Паули и стремлением энергии системы к минимуму часть нейтронов меняет ориентацию магнитных моментов на противоположную (рисунок 1в). Соответствующие графики зависимости  $\varepsilon_{nk}$  от  $p_n$  представлены на рисунках 1г, 1д и 1е.

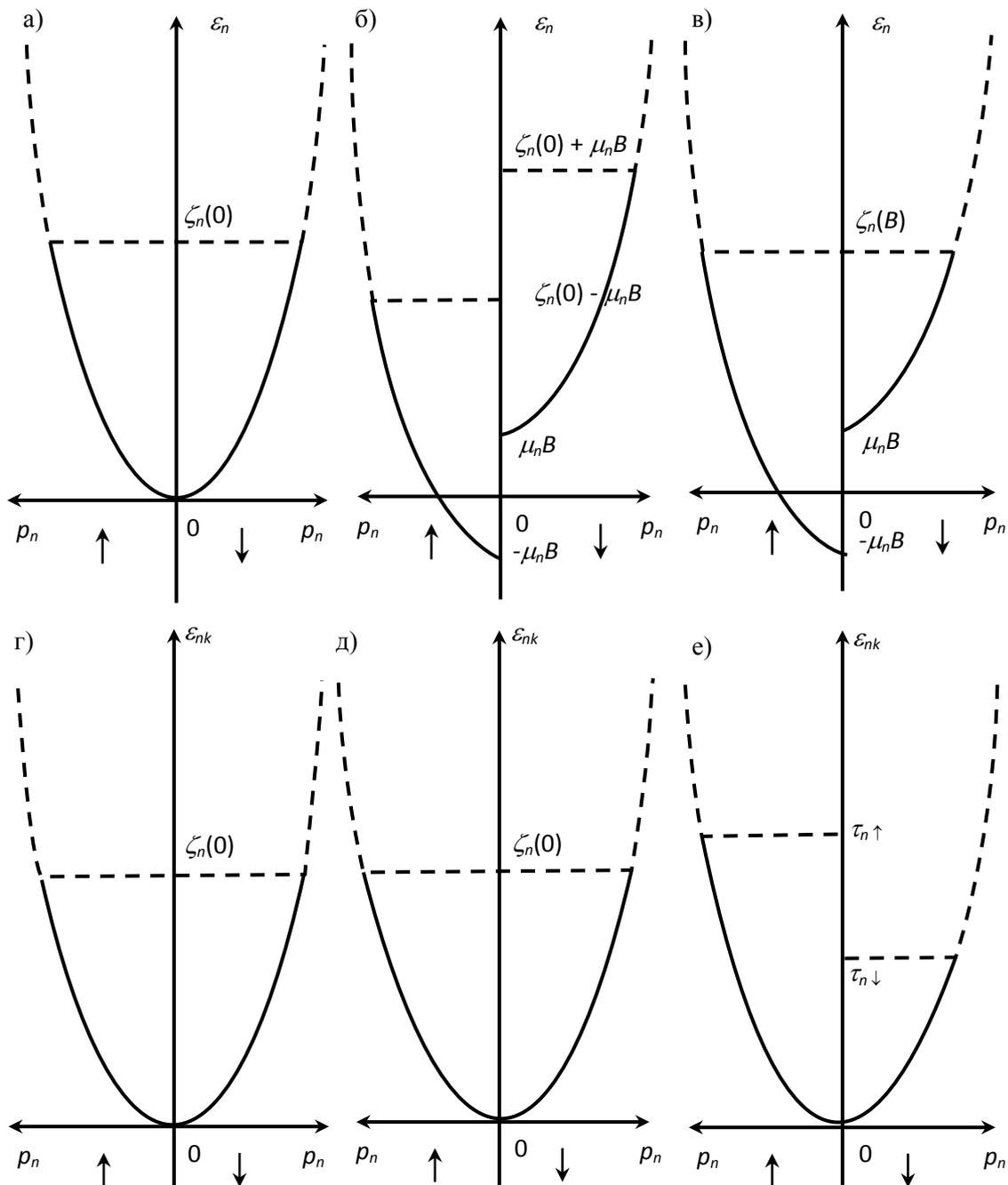


Рисунок 1



Концентрация нейтронов в магнитном поле находится из условия нормировки:

$$\begin{aligned} n_n &= n_{n\uparrow} + n_{n\downarrow} = 2\pi \frac{(2m_n)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left( \int_0^{\tau_{n\uparrow}} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk} + \int_0^{\tau_{n\downarrow}} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk} \right) = \\ &= \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3} (\tau_{n\downarrow}^{3/2} + \tau_{n\uparrow}^{3/2}) = \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3} \left( (\zeta_n(B) + \mu_n B)^{3/2} + (\zeta_n(B) - \mu_n B)^{3/2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь учтено, что число квантовых состояний для нейтрона с определенным направлением спина, находящегося в объеме  $V$  и обладающего импульсом от  $p_n$  до  $p_n + dp_n$ , при наличии магнитного поля такое же, как и в отсутствие последнего:

$$dG_n = \frac{4\pi p_n^2 dp_n V}{(2\pi\hbar)^3} = 2\pi \frac{(2m_n)^{3/2} V}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk}. \quad (4)$$

Таким образом, в магнитном поле происходит частичная или полная поляризация парамагнитного ферми-газа. Степень поляризации

$$p_{0n} = \frac{n_{n\uparrow} - n_{n\downarrow}}{n_n}, \quad (5)$$

$n_{n\uparrow}$  и  $n_{n\downarrow}$  – концентрации нейтронов с магнитными моментами, направленными по и против вектора индукции внешнего магнитного поля. Из (3) и (5) следует:

$$n_n (1 + p_{0n}) = \frac{(2m_n)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} (\zeta_n(B) + \mu_n B)^{3/2}, \quad (6)$$

$$n_n (1 - p_{0n}) = \frac{(2m_n)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} (\zeta_n(B) - \mu_n B)^{3/2}, \quad (7)$$

$$(1 + p_{0n})^{2/3} - (1 - p_{0n})^{2/3} = \frac{4m_n\mu_n B}{(3\pi^2\hbar^3 n_n)^{2/3}}. \quad (8)$$

Последнее соотношение позволяет вычислять степень поляризации нейтронного газа заданной концентрации в зависимости от индукции магнитного поля.

Полная поляризация ( $n_{n\uparrow} = n_n$ ,  $n_{n\downarrow} = 0$ ) имеет место при  $\mu_n B \geq \zeta_n(B)$ . В этом случае

$$\tau_{n\uparrow} = 2^{2/3} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n} = 2^{2/3} \zeta_n(0), \quad (9)$$

$$\zeta_n(B) = 2^{2/3} \zeta_n(0) - \mu_n B. \quad (10)$$

Итак, при  $B \neq 0$  термин «энергия Ферми» оказывается двусмысленным: то ли его следует отнести к максимальной полной энергии, то ли к максимальной кинетической, которые существенно различаются. Данная двусмысленность и неопределенность терминологии, приводящая иногда даже к физически некорректным выводам, присуща значительному количеству научных публикаций. На наш взгляд, имеет смысл от термина «энергия Ферми» по отношению к ферми-газу в магнитном поле вообще отказаться и оперировать такими понятиями, как «максимальная полная энергия» («химический



потенциал») и «максимальная кинетическая энергия», достаточно точно отражающими физическую сущность данных величин.

Аналогичная ситуация, очевидно, имеет место и при описании газа заряженных фермионов в магнитном поле с учетом диамагнетизма Ландау.

2. Рассмотрим теперь крайне вырожденный идеальный нерелятивистский электронный газ в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией  $B$ . В первом приближении пренебрегаем величиной аномального магнитного момента электрона и полагаем собственный магнитный момент электрона равным магнетону Бора  $\mu_B$ . Используя результаты [3], выражение для полной энергии электрона в магнитном поле представим в виде:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_{ek} + 2s\mu_B B = \frac{p_{ez}^2}{2m_e} + \mu_B B(2n+1) + 2s\mu_B B, \quad (11)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер квантового уровня Ландау,  $p_{ez}$  – проекция импульса  $p_e$  электрона на направление индукции магнитного поля,  $m_e$  – масса электрона,  $s = \mp 1/2$ .

Для электронного газа график зависимости  $\varepsilon_e$  от  $p_{ez}$  в присутствии магнитного поля (рисунок 2а) представляет собой семейство парабол, вдоль которых распределены квантовые состояния (заполненные состояния изображены сплошными линиями). Каждому значению  $n$  соответствуют две ветви параболы, смещенные друг относительно друга на величину  $2\mu_B B$  (рисунок 2а). Соответствующий график зависимости  $\varepsilon_{ek}$  от  $p_{ez}$  представлен на рисунке 2б.

Число квантовых состояний электрона с определенным направлением спина, находящегося в объеме  $V$  и обладающего проекцией импульса от  $p_{ez}$  до  $p_{ez} + dp_{ez}$ , при наличии магнитного поля определяется выражением [3]:

$$\begin{aligned} dG_e &= \frac{m_e \mu_B B V}{2\pi^2 \hbar^3} dp_{ez} = \frac{m_e^{3/2} \mu_B B V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} = \\ &= \frac{m_e^{3/2} \mu_B B V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \frac{d\varepsilon_e}{\sqrt{\varepsilon_e - \mu_B B(2n+1+2s)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом  $d\varepsilon_{ek} = d\varepsilon_e$ . Легко видеть, что плотность числа квантовых состояний в энергетических переменных  $g_e = \frac{1}{V} \frac{dG_e}{d\varepsilon_e} = \frac{1}{V} \frac{dG_e}{d\varepsilon_{ek}}$  является разрывной функцией энергии (как полной, так и кинетической), а для фиксированных значений  $B$ ,  $n$  и  $s$  убывает с ростом энергии. Для фиксированных значений  $\varepsilon_e$ ,  $n$  и  $s$  (или  $\varepsilon_{ek}$ ,  $n$  и  $s$ ) величина  $g_e$  с ростом индукции магнитного поля увеличивается; при этом увеличиваются «энергетические зазоры» между параболой с одинаковыми  $s$  и различными  $n$ , а также величина  $2\mu_B B$  относительного смещения ветвей параболы для заданного  $n$  и различных  $s$  (рисунок 2). Таким образом, при увеличении индукции магнитного поля все большее число электронов крайне вырожденного газа попадают в состояния с меньшими значениями номера квантового уровня Ландау и  $s = -1/2$ , т. е. растет степень поляризации,



и при достаточно больших значениях  $B$  принципиально возможна полная поляризация ферми-газа заданной концентрации. Графики зависимостей  $\varepsilon_e$  и  $\varepsilon_{ek}$  от  $g_e$  представлены на рисунке 3а, б.

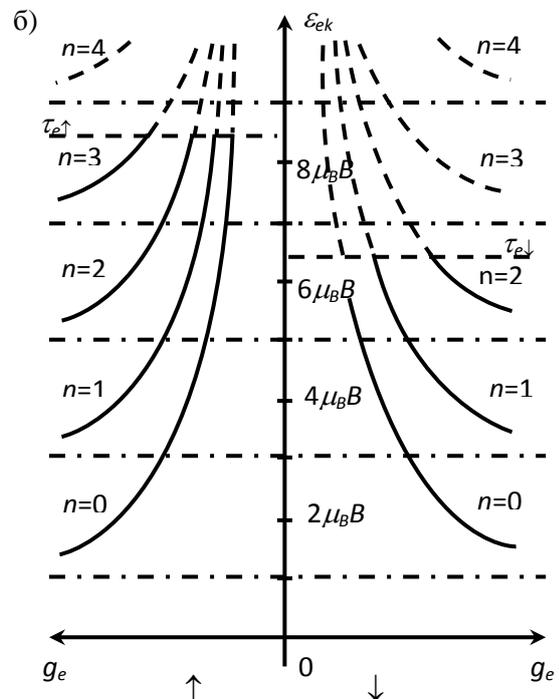
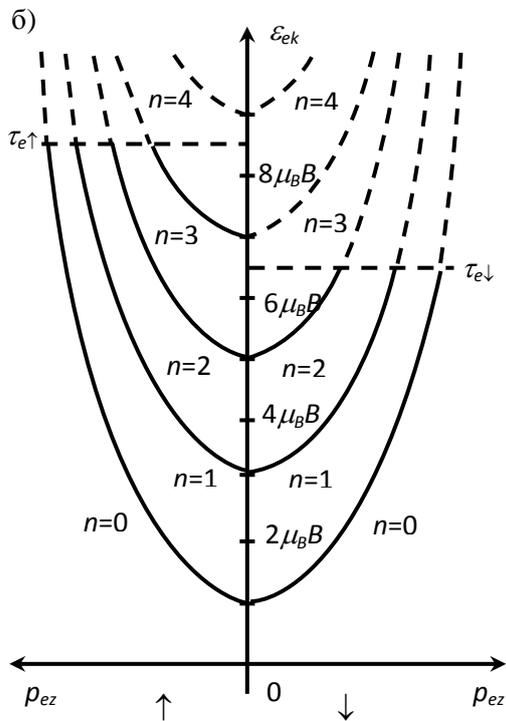
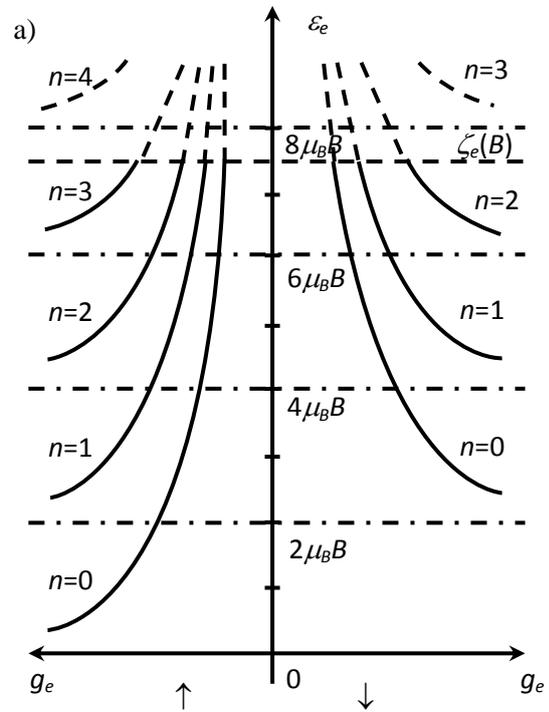
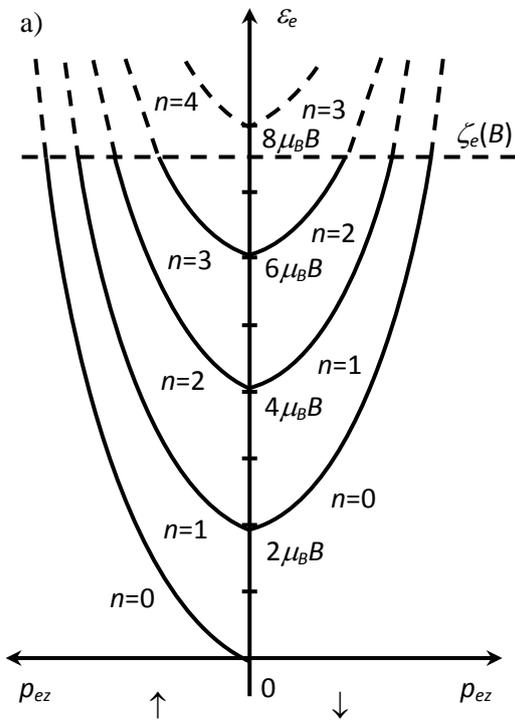


Рисунок 2

Рисунок 3



Концентрация электронов в магнитном поле находится из условия нормировки:

$$\begin{aligned}
 n_e = n_{e\uparrow} + n_{e\downarrow} &= \frac{m_e^{3/2} \mu_B B}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \sum_n \left( \int_0^{\tau_{e\uparrow}} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} + \int_0^{\tau_{e\downarrow}} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} \right) = \\
 &= \frac{2^{1/2} m_e^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left( \sqrt{\tau_{e\uparrow} - \mu_B B(2n+1)} + \sqrt{\tau_{e\downarrow} - \mu_B B(2n+1)} \right) = \\
 &= \frac{2^{1/2} m_e^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left( \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B(2n+2)} + \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B \cdot 2n} \right), \quad (13)
 \end{aligned}$$

где  $\zeta_e(B)$  – химический потенциал электронного газа, измеренный с точностью до слагаемого  $m_e c^2$  (максимальная полная энергия электрона),  $\tau_{e\uparrow}$  и  $\tau_{e\downarrow}$  – максимальные кинетические энергии электронов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю.

Суммирование в (13) ведется от нуля до максимальных значений  $n$ , при которых выражения под знаками радикалов неотрицательны.

Степень поляризации электронного газа

$$p_{0e} = \frac{n_{e\uparrow} - n_{e\downarrow}}{n_e}, \quad (14)$$

$n_{e\uparrow}$  и  $n_{e\downarrow}$  – концентрации электронов с магнитными моментами, направленными по и против индукции внешнего магнитного поля.

Из (13) и (14) находим:

$$n_e (1 + p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B \cdot 2n}, \quad (15)$$

$$n_e (1 - p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B(2n+2)}. \quad (16)$$

Исключив величину  $\zeta_e(B)$  из (15) и (16), получим

$$n_e (1 + p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^2}{2m_e^3 \mu_B^2 B^2} p_{0e}^2 - \mu_B B \cdot 2n}, \quad (17)$$

что позволяет вычислять степень поляризации электронного газа заданной концентрации в зависимости от индукции магнитного поля.

Полная поляризация (рисунок 2а) имеет место при

$$\zeta_e(B) \leq 2\mu_B B. \quad (18)$$

Это дает

$$B \geq \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_e^{2/3}}{2^{2/3} m_e \mu_B} = B^{(e)}, \quad (19)$$



что соответствует условию квантового предела для электронов в магнитном поле ( $n = 0, s = -1/2$ ).

3. Перейдем к рассмотрению крайне вырожденного идеального нерелятивистского протонного газа в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией  $B$ . Выражение для полной энергии протона в магнитном поле запишем в виде:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{pk} + 2s\sigma_p\mu_\alpha B = \frac{p_{pz}^2}{2m_p} + \mu_\alpha B(2n+1) + 2s\sigma_p\mu_\alpha B, \quad (20)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $s = \mp 1/2$ ;  $p_{pz}$  – проекция импульса  $p_p$  протона на направление индукции магнитного поля,  $m_p$  – масса протона,  $\sigma_p \approx 2,793$  – величина отношения собственного магнитного момента протона к ядерному магнетону  $\mu_\alpha$ .

Для нерелятивистских протонов в приближении крайнего вырождения графики зависимостей  $\varepsilon_p$  и  $\varepsilon_{pk}$  от  $p_{pz}$  представлены на рисунке 4 (а, б).

Число квантовых состояний протона с определенным направлением спина, находящегося в объеме  $V$  и обладающего проекцией импульса от  $p_{pz}$  до  $p_{pz} + dp_{pz}$ , при наличии магнитного поля определяется выражением, аналогичным (12):

$$\begin{aligned} dG_p &= \frac{m_p\mu_\alpha BV}{2\pi^2\hbar^3} dp_{pz} = \frac{m_p^{3/2}\mu_\alpha BV}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_\alpha B(2n+1)}} = \\ &= \frac{m_p^{3/2}\mu_\alpha BV}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3} \frac{d\varepsilon_p}{\sqrt{\varepsilon_p - \mu_\alpha B(2n+1+2s\sigma_p)}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Несложно убедиться, что  $\frac{dG_p}{dp_{pz}} = \frac{dG_e}{dp_{ez}}$ , поскольку  $m_p\mu_\alpha = m_e\mu_B$ , но при этом

$$g_p = \frac{1}{V} \frac{dG_p}{d\varepsilon_p} = \frac{1}{V} \frac{dG_p}{d\varepsilon_{pk}} \neq g_e.$$

Здесь  $g_p$  также является разрывной функцией энергии, а для фиксированных значений  $\varepsilon_p$ ,  $n$  и  $s$  (или  $\varepsilon_{pk}$ ,  $n$  и  $s$ ) величина  $g_p$  увеличивается с ростом  $B$ .

При увеличении индукции магнитного поля, как и в случае электронов, растет степень поляризации протонного газа и имеется принципиальная возможность его полной поляризации. Графики зависимостей  $\varepsilon_p$  и  $\varepsilon_{pk}$  от  $g_p$  представлены на рисунке 5 (а, б).

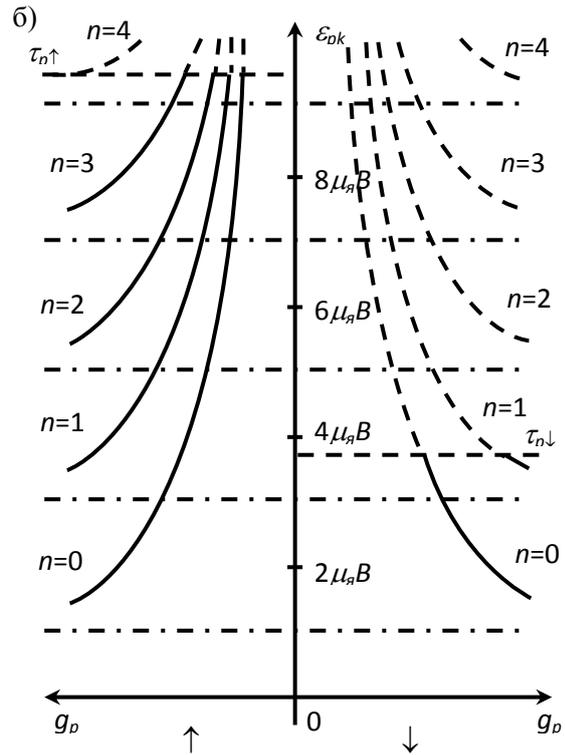
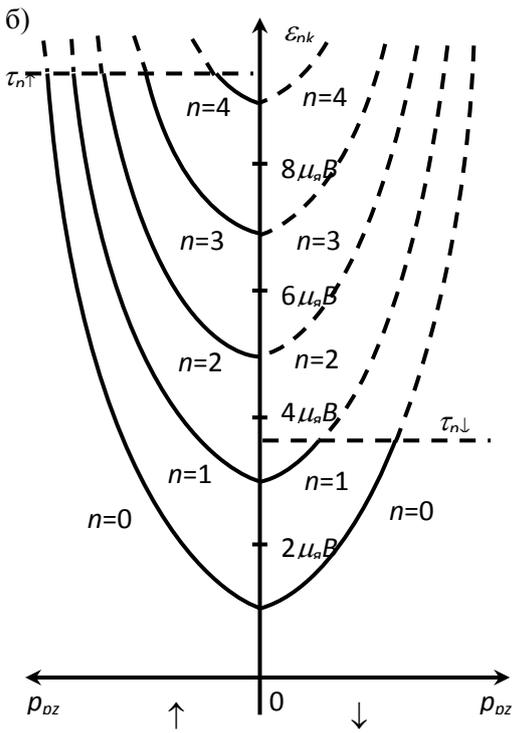
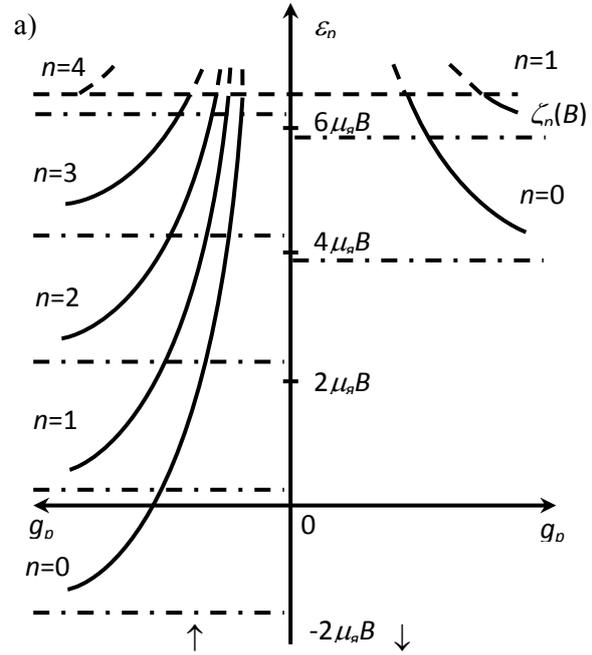
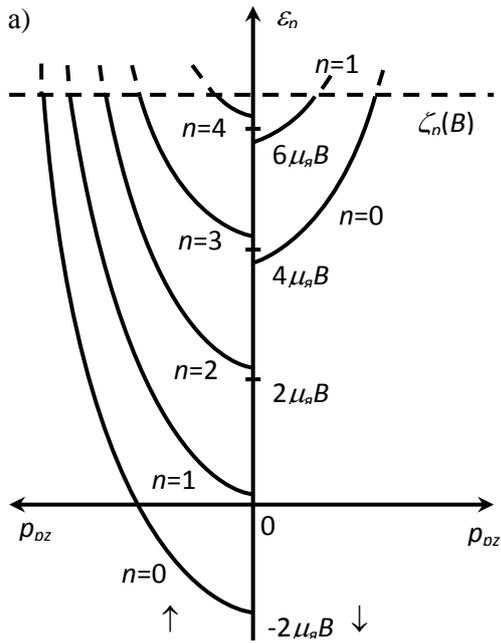


Рисунок 4

Рисунок 5

Концентрация протонов в магнитном поле определяется аналогично концентрации электронов (13):



$$\begin{aligned}n_p &= n_{p\uparrow} + n_{p\downarrow} = \frac{m_p^{3/2} \mu_\gamma B}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \sum_n \left( \int_0^{\tau_{p\uparrow}} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_\gamma B(2n+1)}} + \int_0^{\tau_{p\downarrow}} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_\gamma B(2n+1)}} \right) = \\&= \frac{2^{1/2} m_p^{3/2} \mu_\gamma B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left( \sqrt{\tau_{p\uparrow} - \mu_\gamma B(2n+1)} + \sqrt{\tau_{p\downarrow} - \mu_\gamma B(2n+1)} \right) = \\&= \frac{2^{1/2} m_p^{3/2} \mu_\gamma B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left( \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\gamma B(2n+1 + \sigma_p)} + \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\gamma B(2n+1 - \sigma_p)} \right), \quad (22)\end{aligned}$$

где  $\zeta_p(B)$  – химический потенциал протонного газа, измеренный с точностью до слагаемого  $m_p c^2$  (максимальная полная энергия протона);  $\tau_{p\uparrow}$ ,  $n_{p\uparrow}$  и  $\tau_{p\downarrow}$ ,  $n_{p\downarrow}$  – максимальные кинетические энергии и концентрации протонов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю. Суммирование в (22), как и в (13), ведется от нуля до максимальных значений  $n$ , при которых выражения под знаками радикалов неотрицательны.

Учитывая, что степень поляризации протонного газа

$$p_{0p} = \frac{n_{p\uparrow} - n_{p\downarrow}}{n_p}, \quad (23)$$

из (22) и (23) получаем:

$$n_p (1 + p_{0p}) = \frac{(2m_p)^{3/2} \mu_\gamma B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\gamma B(2n+1 - \sigma_p)}, \quad (24)$$

$$n_p (1 - p_{0p}) = \frac{(2m_p)^{3/2} \mu_\gamma B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\gamma B(2n+1 + \sigma_p)}. \quad (25)$$

Исключить величину  $\zeta_p(B)$  из (24) и (25) или выразить в явном виде не представляется возможным.

Полная поляризация имеет место, если

$$\zeta_p(B) \leq \mu_\gamma B(1 + \sigma_p). \quad (26)$$

Подставляя это выражение в (24), находим

$$\frac{\pi^2 \hbar^3 n_p}{2m_p^{3/2} \mu_\gamma^{3/2} B^{3/2}} \leq \sqrt{\sigma_p} + \sqrt{\sigma_p - 1} + \sqrt{\sigma_p - 2}. \quad (27)$$

Итак, протонный газ полностью поляризован, если

$$B \geq \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2^{2/3} m_p \mu_\gamma (\sigma_p^*)^{1/3}} = \frac{B^{(p)}}{(\sigma_p^*)^{1/3}}, \quad (28)$$

где

$$\sigma_p^* = \left( \sqrt{\sigma_p} + \sqrt{\sigma_p - 1} + \sqrt{\sigma_p - 2} \right)^2 \approx 15,214, \quad (29)$$



$B^{(p)}$  – значенне індукцыі, адпавядаючае квантаваму межу суперсильнага магнітнага поля для пратонаў (пры  $B \geq B^{(p)}$   $n = 0$ ,  $s = -1/2$ ,  $\zeta_p(B) \leq \mu_y B(3 - \sigma_p)$ ).

Как отмечалось в [4],  $B^{(p)} = B^{(e)} \approx 3,8 \cdot 10^{-7} n_p^{2/3}$  Гс при  $n_p = n_e$ .

Таким образом, критерий полной поляризации для электронов совпадает с критерием квантового предела, а для протонов критерий квантового предела более жесткий, чем критерий полной поляризации.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1977. – 552 с.
2. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
3. Ландау, Л. Д. Диамагнетизм металлов / Л. Д. Ландау // Собр. тр. : в 2 т. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – С. 47–55.
4. Липовецкий, С. С. Термодинамические характеристики ферми-газов в магнитном поле / С. С. Липовецкий, А. А. Олесик, В. С. Секержицкий // Изв. вузов. Физика. – 1987. – № 5. – С. 21–25.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 04.09.2020*



УДК 577.13:543.424.7

**Нонна Степановна Ступень**

канд. техн. наук, доц., доц. каф. химии

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Nonna Stupen**

PhD in Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Chemistry  
of Brest State A. S. Pushkin University  
e-mail: chemskorp@yandex.ru

## ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ КОМПЛЕКСНОЙ ФОСФАТ-КРЕМНЕЗЕМСОДЕРЖАЩЕЙ ДОБАВКИ В МАГНЕЗИАЛЬНЫЙ ЦЕМЕНТ НА ОСНОВЕ КАУСТИЧЕСКОГО ДОЛОМИТА

*Представлены экспериментальные данные по разработке комплексной фосфатно-кремнеземсодержащей добавки в магнезиальный цемент на основе каустического доломита. На основе этой добавки получен магнезиальный композит с повышенной водостойкостью и атмосферостойкостью.*

### Hydraulic Activity of the Complex Phosphate-Silica-Containing Additive in Magnesia Cement Based on Caustic

*The article presents experimental data on the development of a complex phosphate-silica-containing additive to magnesia cement based on caustic dolomite. Based on this additive, a magnesia composite with increased water and weather resistance was obtained.*

#### Введение

В настоящее время в группу магнезиальных бетонов входят 10 подгрупп, в каждую подгруппу – 10 видов, в каждый вид – 1 000 составов. Такая классификация дает возможность кодировать 100 тыс. составов [1]. Это свидетельствует о том, что данные вяжущие композиты очень разнообразны и находят широкое применение в промышленности.

По химико-минералогическому составу магнезиальные бетоны делятся на:

- 1) магнезиальноизвестковые (содержат оксид магния и оксид кальция);
- 2) магнезиальношпинелидные (оксид магния и оксиды трехвалентных металлов, например, алюминия или хрома);
- 3) магнезиально-углеродистые (оксид магния и углерод);
- 4) магнезиальносиликатные (оксид магния и оксид кремния) и магнезиальноцирконистые (оксид магния и оксид циркония).

По открытой пористости магнезиальные заполнители подразделяют на высокоплотные (менее 10 % пор), плотные (1–15 %), повышенной плотности (16–20 %), обычной плотности (21–30 %), пониженной плотности (31–45 %) и низкой плотности (более 45 % пор).

Использование в качестве заполнителей волокнистых и игольчатых частиц углеродистого, высокоглиноземистого, корундового и магнезиального составов резко повышает термостойкость и износостойчивость магнезиальных бетонов.

Для изготовления магнезиальных бетонов используют различные виды вяжущих веществ, которые должны обеспечивать твердение бетона при низких температурах, сохранение прочности при средних температурах, формирование износостойчивой структуры бетона вплоть до высоких температур. В зависимости от состава вяжущие



делятся на пять видов: гидратационные, сульфатно-хлоридные, силикатные, фосфатные и органические [1–3].

Гидратационные вяжущие твердеют при смешивании с водой. К ним относятся следующие виды цементов: высокоглиноземистый, глиноземистый, барийалюминатный, периклазоалюминатный, алитопериклазовый, периклазовый.

Дисперсионной средой в сульфатно-хлоридных вяжущих являются растворы сульфатов и хлоридов магния, железа и алюминия, а также алюминаты натрия. Дисперсная фаза – различные магнезиальные цементы. Иногда в качестве жидкости затворения используют отходы производства – отработанные растворы травильных ванн.

Силикатные вяжущие – дисперсные системы, в которых дисперсная фаза (магнезиальный цемент) смешивается с щелочными силикатами (жидкое стекло). Еще используются этилсиликат, кремнезоль и другие растворы, содержащие золь кремниевой кислоты.

В фосфатных вяжущих магнезиальный цемент смешивают с растворами фосфорной кислоты и ее кислыми солями. Наибольшее распространение в качестве жидкости затворения получили полифосфаты натрия, триполифосфат натрия и тринатрийфосфат. Используют также смеси ортофосфорной кислоты с периклазовым порошком, при этом получается магнийфосфатная связка, а с доломитом – доломитфосфатная. Для торкретирования применяют кальцийфосфатную, алюмохромфосфатную, цирконийфосфатную связки.

В органических вяжущих магнезиальные цементы смешивают с органическими веществами: смолами, пеками, отработанными техническими маслами, битумом, гудроном, лигносульфонатом и др.

По способам получения магнезиальные вяжущие делят на три группы: химические, механохимические и экзотермические.

Химические вяжущие – дисперсные системы, состоящие из огнеупорных цементов и химических (механохимических) связей, полученные простым смешиванием.

Механохимические вяжущие – дисперсные системы, состоящие из огнеупорных цементов и химических, механохимических связей, полученных при совместном помолу огнеупорных материалов, воды, растворов с добавками солей или без них. Твердеют они вследствие прохождения между ними процессов образования новых соединений, полимеризации или поликонденсации.

Экзотермические вяжущие – это дисперсные системы, состоящие из огнеупорных цементов, химических или механохимических связей и экзотермических добавок, полученные путем их простого смешивания или совместного помолу и твердеющие вследствие прохождения между ними экзотермических процессов.

В зависимости от используемой жидкости затворения связки, так же, как и вяжущие, подразделяются на гидратационные, сульфатно-хлоридные, силикатные, фосфатные и органические. Добавки вводят в магнезиальные бетоны для корректировки их свойств. К добавкам, регулирующим реологические свойства, относятся пластифицирующие и разжижающие; регулирующим сроки схватывания и твердения – ускорители и замедлители твердения, противоморозные добавки; регулирующим структуру – противосадочные, микрогазообразующие, эвтектические; регулирующим термомеханические свойства бетонов – повышающие термостойкость, плотность, шлакоустойчивость. Есть также добавки, регулирующие поверхностные свойства бетонных изделий, – органические покрытия, пропитывающие растворы, добавки, понижающие поверхностное натяжение; уменьшающие выгорание углерода (антиоксиданты).



Магнезиальные цементы на каустическом магнезите и доломите имеют ряд отрицательных качеств при схватывании и структурообразовании, а также низкую водостойкость. Выявлена техническая возможность применения в качестве заполнителей на каустическом доломите промышленных отходов (древесная мука, золошлаковые смеси, бумажные и пластиковые отходы, отходы переработки автомобильных шин) [4; 5].

Основная причина низкой водостойкости магнезиального цемента на основе каустического доломита связана с тем, что при контакте с водой гидратируется непрореагировавший каустический доломит, который всегда содержится в искусственном камне, либо аморфный гидроксид магния. Также причиной может быть гидролиз триоксида гидрохлорида магния [4; 5]. Поэтому все методы повышения водостойкости сводятся либо к обеспечению наибольшей реакционной способности каустического магнезита, либо к подавлению гидролиза гидроксохлоридов магния. Таким образом, многообразие подходов можно условно разделить на пять групп:

- 1) изменение свойств каустического магнезита;
- 2) изменение свойств затворителя;
- 3) оптимизация состава цементной смеси;
- 4) использование активных заполнителей;
- 5) органические добавки.

Проведен анализ экологичности и на основании этого целесообразности использования добавок в магнезиальный цемент [1; 2].

1. Поливинилацетатная дисперсия (ПВА, ГОСТ 18922-80). Введение ПВА обеспечивает увеличение адгезии цементного теста и незначительное увеличение прочности. При деструкции в составе строительного материала возможна эмиссия токсичных органических соединений.

2. Натриевая соль карбоксиметилцеллюлозы (КМЦ). Введение этой добавки обеспечивает увеличение прочности и трещиностойкости. Основой для получения данной добавки служит возобновляемое сырье (древесина). Однако в технологии производства используются токсичные хлорорганические соединения.

3. Щавелевая кислота (ГОСТ 22180-76). При стандартных условиях щавелевая кислота твердая, а потому работа с ней более технологична, чем с концентрированной фосфорной кислотой.

4. Хризотил-асбест, модифицированный концентрированной серной кислотой (ГОСТ 4204-77), оказывает структурирующее действие, приводящее к повышению прочности и водостойкости, но есть рекомендации избегать применения асбеста в строительных изделиях.

5. Микрокремнезем конденсированный уплотненный (МКУ-85) является добавкой полифункционального действия, улучшает прочность, стойкость к коррозии и водостойкость бетона, является побочным продуктом производства ферросилиция, нетоксичен.

Таким образом, для модифицирования каустического магнезита можно рекомендовать щавелевую кислоту, микрокремнезем, а для того чтобы соблюдать экологические нормы, следует избегать применения полимерных модифицирующих добавок. С определенной осторожностью можно использовать хризотел-асбест.

Многочисленные исследования позволили установить возможность использования отходов ферросплавного производства в качестве гидравлических добавок в вяжущие вещества. Использование отходов промышленных предприятий для получения разнообразных строительных материалов имеет значительный экономический и экологический эффект [4–6].



Анализ экспериментальных данных показал, что использование комплексной добавки микрокремнезема и стеклобоя достаточно эффективно. Следует отметить снижение коэффициента размягчения и водопоглощения композиционного вяжущего в сравнении с данными показателями для вяжущего с микрокремнеземом и стеклобоем по отдельности. Особенно эффективна комплексная добавка с содержанием и 15 % микрокремнезема, и 10 % стеклобоя с размером частиц 10–3 мкм.

Присутствие аморфного кремнезема способствует увеличению скорости гидратации оксида магния. Скорость образования гидросиликатов при комнатной температуре в значительной степени зависит от дисперсности  $\text{SiO}_2$ . Установлено, что если кварцевые частицы имеют размеры меньше 20–30 мкм, то они довольно быстро взаимодействуют с гидроксидом магния, образуя гидросиликаты. Это, в частности, обусловлено тем, что скорость образования гидросиликатов при комнатной температуре увеличивается с повышением концентрации силановых групп ( $-\text{Si}-\text{OH}$ ), которая, в свою очередь, связана с дисперсностью кварцевого порошка. При помоле кварца происходит частичное разрушение связи  $-\text{Si}-\text{O}-\text{Si}-$  с образованием связи  $-\text{O}-\text{Si}-$ , которая с влагой воздуха легко образует на поверхности зерен кварца силановые связи  $-\text{Si}-\text{OH}$  [7–9].

Экспериментально установлена возможность использования фосфатной добавки (фосфата алюминия и фосфата натрия) в магнезиальный цемент. Полученные данные показывают, что при введении фосфата алюминия и фосфата натрия достигается плотная структура цементного клинкера и поровое пространство значительно меньше, чем у образцов из магнезиального цемента без добавок. Установлено, что при использовании фосфатных добавок существенно нормализуются процессы структурообразования и твердения магнезиального цемента на основе каустического доломита и улучшаются его свойства: достигается устойчивый рост прочности, снижаются собственные деформации расширения, уменьшается опасность развития деструктивных процессов (образование трещин) и т. д. При введении фосфатных добавок в вяжущее более чем в 2 раза улучшился показатель пор, что способствовало увеличению прочности и водостойкости магнезиального цемента. Наилучшие показатели однородности пор получены для композиционного вяжущего с 15 % фосфата алюминия (добавка вводилась при помоле). Дальнейшее увеличение содержания фосфатной добавки, наоборот, привело к снижению прочности и водостойкости образцов из магнезиального цемента. Это связано с процессами деструкции за счет появления повышенного напряжения на зернах оксида магния, которое возникает из-за избыточного несвязанного фосфата алюминия [10].

Цель исследований – разработка состава комплексной фосфатно-кремнеземосодержащей добавки в магнезиальный цемент на основе каустического доломита.

#### **Методика и объекты исследования**

Для исследований использовали полуобжиговый доломит месторождения Руба (Витебская область, Республика Беларусь), раствор бишофита ( $\text{MgCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ) с массовой долей  $\text{MgCl}_2$  15 %, стеклобой бытовых отходов (размер частиц 0,001 мм), фосфат натрия (размер частиц 0,001 мм).

Для оценки влияния добавки измельченного стеклобоя и фосфата натрия в магнезиальное вяжущее на основе каустического доломита приготавливали композиционные смеси с содержанием стеклобоя и фосфата натрия от 0 до 25 % по массе. Исследование свойств композиционных вяжущих проводили на образцах-кубиках  $2 \times 2 \times 2$  см, изготовленных из теста нормальной густоты литьевым способом. Стойкость образцов к попеременному увлажнению – высушиванию изучали следующим образом. Сначала



образцы в течение 3 ч выдерживали в воде при температуре  $(20 \pm 2)$  °С, а затем их высушивали в течение 15 ч при такой же температуре. После этого их высушивали в течение 6 ч в сушильном шкафу при температуре 60–65 °С. Указанные операции по водонасыщению и высушиванию принимали за один цикл испытаний. Принятую в опытах продолжительность выдерживания образцов в воде определяли из условия, что в течение этого времени их водонасыщение достигает примерно 85 % максимально возможного значения. После каждых 10 циклов для физико-механических испытаний отбирали по 10 образцов, половину которых испытывали в высушенном до постоянной массы состоянии, а остальные – в водонасыщенном. По показателям прочности образцов на сжатие определяли коэффициенты размягчения и воздухоустойкости. Последний вычисляли как частное от деления прочности высушенных до постоянной массы образцов, прошедших N циклов испытаний, к прочности контрольных образцов (при «нулевом» цикле испытаний). Считали, что материал выдерживает испытания, если коэффициент воздухоустойкости остается не менее 0,75.

В исследованиях использованы физико-химические методы исследования, определение показателей пористости образцов по кинетике водопоглощения.

### Результаты и их обсуждение

Твердение композиционного магнезиального вяжущего на основе каустического доломита – сложный физико-химический процесс, который идет достаточно медленно. К существенным кинетическим факторам относятся степень соприкосновения фаз, находящаяся под влиянием тонкости помола, времени выдержки, применение различных модификаций. Эти факторы существенным образом влияют на термодинамические константы исходных материалов, а следовательно, и на ожидаемый результат взаимодействия. Однако в отдельных случаях кинетические факторы можно ограничить. Это касается и силикатных систем. В подобных случаях скорости реакций определяются диффузионными процессами, связанными с транспортом структурных единиц компонентов, участвующих в реакции, к соответствующим границам фаз.

Было установлено, что структурообразование при твердении магнезиального цемента не заканчивается после 28 суток воздушного твердения. Поэтому исследование композитов вели после трех месяцев твердения.

Результаты экспериментальных исследований представлены в таблице.

Таблица. – Зависимость коэффициентов размягчения, воздухоустойкости и водопоглощения от содержания стеклобоя и фосфата натрия (размер частиц 0,001 мм)

№ п/п состава	Содержание стеклобоя, %	Содержание фосфатной добавки, %	Коэффициент воздухоустойкости (Кв)	Коэффициент размягчения (Кр)	Водопоглощение по массе (W), %
1	0	0	0,58	0,55	19,9
2	0	25	0,68	0,62	17,1
3	5	20	0,70	0,68	14,5
4	10	15	0,76	0,71	12,1
5	15	10	0,78	0,75	10,9
6	20	15	0,79	0,76	10,4
7	25	0	0,74	0,70	13,6



Из данных, приведенных выше, видно, что введение в магнезиальный цемент и фосфата натрия (25 % по массе), и стеклобоя (25 % по массе) улучшает физико-механические показатели затвердевшего цементного камня: повышаются коэффициенты размягчения и воздухоустойкости, а также уменьшается водопоглощение. Улучшение этих показателей свидетельствует о водостойкости изделий из таких композитов. Но более высокие показатели воздухоустойкости и водостойкости достигаются при введении в магнезиальный цемент комплексной добавки, состоящей из стеклобоя и фосфата натрия, в количестве от 10 до 20 % по массе каждого из компонентов. Самые высокие показатели водостойкости характерны для образцов из 5 и 6 составов магнезиальных композитов (таблица).

С использованием комплекса физико-химических методов исследований изучены особенности процессов гидратации и структурообразования цементного камня на основе модифицированных каустических доломитов. Установлено, что при использовании комплексной фосфатно-кремнеземсодержащей добавки существенно нормализуются процессы структурообразования и твердения магнезиального цемента на основе каустического доломита и улучшаются его свойства: достигается устойчивый рост прочности, снижаются собственные деформации расширения, уменьшается опасность развития деструктивных процессов (образование трещин) и т. д. При введении комплексной добавки в вяжущее более чем в два раза улучшился показатель пор, что способствовало увеличению прочности и водостойкости магнезиального цемента. Наилучшие показатели однородности пор получены для композиционного вяжущего с 10–15 % фосфата натрия и стеклобоя (добавка вводилась при помоле). Дальнейшее увеличение содержания фосфата натрия и стеклобоя ведет к деструкции плотной структуры, что связано с процессами деструкции за счет появления повышенного напряжения на зернах оксида магния, которое возникает из-за избыточного несвязанного количества комплексной добавки. Установлено, что при избытке комплексной добавки хлорид магния (бишофит) в меньшей степени участвует в образовании труднорастворимых гидросиликатов и фосфатов магния и кальция и со временем на поверхности таких образцов появляются «высолы».

Сравнительный анализ шлифов показал, что введение в систему фосфатно-кремнеземсодержащей добавки приводит к уменьшению содержания в материале непрореагировавших зерен оксида магния, увеличивает долю аморфной и скрытокристаллической фаз, которые представлены не только бруситом  $Mg(OH)_2$ , но в небольшом количестве гидросиликатами магния, близкими по своей структуре к природным минералам сепиолиту и серпентину, присутствует смешанный труднорастворимый гидрофосфат кальция и магния. Увеличивается доля хорошо закристаллизованных оксохлоридов магния состава  $3MgO \cdot MgCl_2 \cdot 13H_2O$ ,  $5MgO \cdot MgCl_2 \cdot 13H_2O$ , гидросиликата магния  $(Mg_3(H_2O)_3[Si_4O_{11}]H_2O)$  ( $3MgO \cdot SiO_2 \cdot 4H_2O$ ) – сепиолита. Гидросиликаты магния образуются первоначально в виде гелевидных пленок, которые значительно устойчивее пленок  $Mg(OH)_2$ .

### **Заклучение**

1. Установлено положительное влияние комплексной добавки в магнезиальный цемент на основе каустического доломита, состоящей из фосфата натрия и мелкодисперсного стеклобоя в количестве 10–15 % по массе.

2. Комплексная добавка изменяет процесс твердения и фазовый состав продуктов твердения. Достигается плотная структура цементного клинкера за счет сочетания коагу-



ляционной, аморфной и кристаллических структур, поровое пространство значительно меньше, чем у образцов из магнезиального цемента без добавок.

3. Разработанные составы композиционных вяжущих на основе каустического доломита могут быть рекомендованы для производства облицовочного материала повышенной водостойкости и воздухостойкости.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головнев, С. Г. Высокоэффективные строительные технологии и материалы на основе магнезиального вяжущего / С. Г. Головнев, А. В. Киянец, К. В. Дьяков // Академ. вестн. УралНИИпроект РААСН. – 2009. – № 3. – С. 86–87.
2. Устинова, Ю. В. Повышение водостойкости магнезиальных вяжущих / Ю. В. Устинова, А. Е. Насонова, В. В. Козлов // Вестн. МГСУ. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 123–127.
3. Козлов, В. В. Водостойкость материалов на основе каустического магнезита, модифицированного отходами асбоцементных производств / В. В. Козлов, В. Устинова, А. Е. Насонова // Вестн. МГСУ. – 2011. – Т. 2, № 1. – С. 288–291.
4. Зимич, В. В. Особенности влияния добавки золя гидроксида железа на структуру и свойства магнезиального камня // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Строительство и архитектура. – 2011. – Вып. 13, № 35 (252). – С. 25–32.
5. Войтович, В. А. Полы на основе магнезиальных вяжущих веществ / В. А. Войтович, Г. В. Спиринов // Строит. материалы. – 2003. – № 9. – С. 8–9.
6. Габибов, Н. Б. Исследование влияния различных добавок на физико-механические свойства плиточных материалов на основе каустического магнезита // Вестн. МГСУ. Спецвып. № 1. – 2008. – С. 166–171.
7. Ступень, Н. С. Силикаты магнезия – перспективное сырье для производства современных строительных материалов / Н. С. Ступень // Менделеевские чтения – 2016 : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф. по химии и хим. образованию / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; редкол.: Н. С. Ступень, В. В. Коваленко, В. А. Халецкий ; под общ. ред. Н. С. Ступень. – Брест : БрГУ, 2016. – С. 74–77.
8. Ступень, Н. С. Композиционные вяжущие на основе белорусских доломитов / Н. С. Ступень // Прыроднае асяроддзе Палесся: асаблівасці і перспектывы развіцця : тэз. дакл. IV Міжнар. навук. канф. – Брэст : Альтэрнатыва, 2008. – С. 205.
9. Ступень, Н. С. Стекломагнезиальные композиции: экологические аспекты / Н. С. Ступень // Прыроднае асяроддзе Палесся: асаблівасці і перспектывы развіцця : зб. навук. пр. / Палескі аграр.-экал. ін-т НАН Беларусі ; рэдкал.: М. В. Міхальчук (гал. рэд.) [і інш.]. – Брэст : Альтэрнатыва, 2018. – Вып. 11. – С. 98–100.
10. Ступень, Н. С. Композиционные магнезиальные вяжущие на основе кремнеземсодержащих твердых отходов. / Н. С. Ступень // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна. – Вып. 14, ч. 2. – 2018. – С. 66–72.

*Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.09.2020*



УДК 599.742.42(476)

**Елена Степановна Блоцкая<sup>1</sup>, Ирина Васильевна Абрамова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>канд. биол. наук, доц. каф. анатомии, физиологии и безопасности человека  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>канд. биол. наук, доц., декан географического факультета  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Yelena Blockaja<sup>1</sup>, Irina Abramova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>PhD in Biological Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Anatomy, Physiology and Human Safety  
of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>2</sup>PhD in Biological Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Geography  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: <sup>1</sup>[medicine@brsu.brest.by](mailto:medicine@brsu.brest.by); <sup>2</sup>[iva.abramova@gmail.com](mailto:iva.abramova@gmail.com)

### **БИОТОПИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ПИТАНИЕ И ДИНАМИКА ЧИСЛЕННОСТИ АМЕРИКАНСКОЙ НОРКИ (*MUSTELA VISON L.*) В ЦЕНТРАЛЬНОЙ И ЮГО-ЗАПАДНОЙ БЕЛАРУСИ**

На основании данных многолетних (1976–2019) полевых исследований американской норки в юго-западной и центральной Беларуси, литературных и статистических сведений приведены данные о биотопическом распределении, трофике, динамике численности и плотности ее популяций. Американская норка населяет водные и околоводные биотопы. Эврифаг: в ее рационе в различные сезоны года преобладают рыбы (30,4 % встреч летом и 38,0 % – зимой), амфибии (38,2 и 17,4 % соответственно) и млекопитающие (38,6 и 50,3 % соответственно). За период исследований отмечено колебание численности американской норки, которая варьировала в значительных пределах.

#### **Biotoxic Distribution, Trophic and Dynamic Quantity of the American Mink (*MUSTELA VISON L.*) in the Central and South-West of Belarus**

The article tracks data on biotoxic distribution, trophics, dynamics of population number and density on the basis of long-term (1976–2019) field studies of the American mink in southwestern and central Belarus, as well as literature and statistical data. The American mink inhabits aquatic and bypass habitats. Euriphage, its diet is dominated by fish (30.4 % of encounters in summer and 38.0 % in winter), amphibians (38.2 and 17.4 % respectively) and mammals (38.6 and 50.3 % respectively). During the period of the survey, the number of Minks varied significantly.

#### **Введение**

Одной из актуальных проблем в экологии животных является проблема рационального использования охотничьих животных [1]. Успешное решение оптимизации эксплуатации популяций этой группы животных возможно только при обстоятельном знании основных параметров их экологии. Американская норка в Беларуси относится к инвазивным видам с высоким уровнем угрозы для среды. Является охотничьим видом. В кормовой рацион норки входит ряд ценных и редких видов животных. Это обуславливает необходимость изучения экологии популяций американской норки в природных условиях Беларуси.

#### **Материалы и методы**

Материал собран авторами статьи в 1976–2019 гг. на стационарах и в период краткосрочных выездов в Минской (Березинский и Борисовский р-ны) и Брестской областях (Брестский, Ивацевичский, Березовский, Малоритский и другие р-ны).



В основу работы положены зимние (декабрь – январь) учеты следов на постоянных маршрутах (общая протяженность около 3 тыс. км) с большим числом фиксированных ориентиров. При определении плотности населения зверей по данным маршрутного учета использовали принятые в экологических исследованиях методы [2–4]. Пространственное размещение норок изучали путем тропления их охотничьих ходов. Относительные учеты численности выполнены на маршрутах общей протяженностью более 400 км. В зимнее время было прослежено 25 суточных охотничьих ходов норки. В ходе полевых исследований было найдено и осмотрено 105 убежищ зверей, в т. ч. 45 постоянных. Трофику зверей изучали путем разбора содержимого желудочно-кишечного тракта ( $n = 8$ ), экскрементов ( $n = 398$ ) и остатков добычи ( $n = 28$ ). Время, место охоты, способы добывания корма устанавливали в процессе тропления суточных ходов. Запасы и распределение кормов американской норки определяли путем подсчета жертв (мелкие млекопитающие, земноводные, рыбы и др.). Кроме личных наблюдений использовали сведения, полученные от охотников и егерей, преподавателей Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина.

Для мониторинга численности мелких млекопитающих (являются основными кормовыми объектами норки) применяли ловушки Геро, данные об отловах зверьков приведены в монографии [5].

При анализе численности и изъятия американской норки использовали данные Брестской областной организационной структуры республиканского государственно-общественного объединения «Белорусское общество охотников и рыболовов» и Национального статистического комитета Республики Беларусь.

### **Результаты исследования и их обсуждение**

Ареал американской норки занимает большую часть Северной Америки. В настоящее время в результате акклиматизации она заселила почти всю Европу и Азию [6–8]. Впервые этот вид был обнаружен в Европе в конце 1920-х гг. Это были потомки клеточных зверей, сбежавших из звероферм. Одновременно начались работы по искусственной акклиматизации норок. В СССР американскую норку завезли из Германии в 1926 г. для клеточного содержания. К работам по ее акклиматизации приступили в 1933 г. Зверьки для акклиматизации были поставлены зверофермами [8]. В Беларусь в 1953–1958 гг. было завезено и выпущено в уголья 8 партий норок (около 900 особей) из Башкирской и Татарской АССР [8]. К настоящему времени зверьки расселились практически по всем рекам, ручьям и различным водоемам Беларуси, включая и юго-запад.

По данным тропления 25 полных суточных ходов американской норки, в 40,0 % случаев зверьки возвращались на дневку в те же укрытия, которые они использовали в предшествующие сутки. Длина суточного охотничьего хода и площадь индивидуального участка находились в зависимости от обилия корма и защитных условий биотопа. Длина охотничьего хода варьировала от 0,8 до 5,0 км, в среднем составляла 2,6 км. Площадь индивидуального участка ( $n = 12$ ) в снежный период года колебалась от 96 до 130 га в малокормных угольях и от 20–30 до 40 га в богатых кормами угольях. При высокой плотности зверьков индивидуальные участки различных особей соприкасались или частично перекрывались, при низкой плотности они были разделены. Сходный характер освоения зверьками биотопа отмечен на Северо-Западе СССР [6].

Для обустройства гнезд ( $n = 45$ ) и временных убежищ ( $n = 60$ ) норки используют различные укрытия (таблица 1).



Таблица 1. – Местонахождение постоянных и временных убежищ американской норки

Местоположение убежищ	Постоянные		Временные	
	n	%	n	%
Под корнями деревьев и пней	20	44,4	22	36,6
В норах по берегам водоемов	6	17,8	7	11,7
В кучах валежника	4	8,9	12	20,0
В дуплах упавших деревьев	5	1,1	4	6,7
В бобровых и ондатровых хатках и норах	8	17,8	15	25,0
Всего	45		60	

Места расположения гнезд у американской норки относительно постоянные. Временные убежища зверьки используют обычно во время охоты. Чаще всего постоянные (44,4 %) и временные (36,6 %) убежища располагались под корнями деревьев и пней, а также в норах и хатках бобров или ондатр (соответственно 17,8 и 25,0 %).

**Суточная активность американской норки.** По данным наших наблюдений (n = 168), строго выраженной цикличности суточной активности американской норки в регионе не отмечено, она довольно регулярно встречается как днем, так и ночью. Суточная активность зверьков зависит от погодных условий. Зимой в морозные дни с метелями (температура воздуха около  $-20^{\circ}\text{C}$ ) они не покидают своих убежищ (n = 20). При наличии подводных пустот норки могут не выходить на поверхность снега несколько дней. В брачный период активность зверьков значительно увеличивается.

**Трофика.** Американская норка является эврифагом. В ее рационе преобладают рыбы, амфибии и мелкие млекопитающие. Трофическая ниша американской норки шире, чем европейской. В течение года она добывает корм примерно в равных количествах как в водоемах, так и на суше. Хорошо плавает и ныряет, что позволяет добывать рыбу как летом, так и зимой. В Беларуси в кормовой рацион норки входит 24 вида рыб, при этом в конкретных водоемах – от 3 до 14 видов. В юго-западной и центральной Беларуси встречаемость рыбы в рационе зверьков, населяющих естественные и искусственно созданные водоемы, зимой составляет 38,0 %, летом – 30,4 % (таблица 2). В регионе американская норка поедает окуня, плотву, мелкую щуку, вьюна, верховку, карася, карпа (всего было отмечено 18 видов рыб). Некоторые из них поедались редко и единично. Встречаемость рыбы на естественных водоемах в питании зверьков в течение года составляет в среднем 27,0–33,0 %, на водоемах искусственного происхождения – 17,0–39,0 % [9]. Отметим, что в Ленинградской области в снежный период рыба составляет 23 % от всех исследованных проб, в бесснежный – 14,6 % [6].

На различных водоемах юго-западной и центральной Беларуси земноводные в кормовом рационе американской норки встречаются часто как летом (38,2 %), так и зимой (17,4 %) (таблица 2).

Ведущее место в трофике американской норки занимают млекопитающие. Летом они обнаружены в 38,6 % случаев, зимой – в 50,3 % (таблица 2). В питании норки преобладают мелкие грызуны (рыжая полевка, серая полевка, мышевидные грызуны и др.). Насекомоядные (бурозубки, кутора) иногда встречаются в экскрементах и желудках зверьков. В Ленинградской области млекопитающие в питании норки встречаются чаще: в 64,9 % исследованных проб зимой и в 32,3 % летом [6]. По данным В. Е. Сидоровича, в Беларуси в рационе американской норки млекопитающие играют второстепенную роль (23,2 %) [10].

По нашим данным, птицы встречаются в рационе норки в 8,2 % случаев летом и в 4,5 % случаев зимой. В летний период американская норка добывает мелких околоводных птиц, а также птенцов водоплавающих птиц и других видов, гнездящихся среди



травянистой растительности у водоемов (пастушки, кулики, камышевки, луговые коньки и др.); зимой – зимующих околоводных птиц. По данным В. Е. Сидоровича, на долю птиц в Беларуси в трофике норки приходится 4,5 % встреч [10], что несколько ниже наших данных. В Карелии [6] птицы имеют большое значение в рационе американской норки, частота встречаемости их составляет 20,3 %, что значительно выше, чем в Ленинградской области в снежный (9,5 %) и в бесснежный периоды (7,7 %).

Летом зверьки часто поедают насекомых (таблица 2), которые играют в регионе значительную роль в их питании (жуки-плавунцы, водомерки, личинки стрекоз и ручейников и др.). Это согласуется с данными других исследователей [6; 10]. В рацион американской норки входят речные раки, моллюски и др. Зверьки изредка поедают растения (наши данные, [6; 9; 10]).

Таблица 2. – Состав кормов американской норки в отдельные сезоны года в юго-западной и центральной Беларуси (доля от количества исследованных проб, %)

Группы и виды кормов	Лето (n = 284)	Зима (n = 150)
Млекопитающие	38,6	50,3
рыжая полевка	6,3	6,7
полевки (серая, полевка-экономка, пашенная)	4,2	5,3
водяная полевка	3,9	4,0
ондатра	2,1	3,4
мышевидные грызуны, ближе не определены	19,1	28,7
насекомоядные	3,0	2,2
Птицы	8,2	4,5
Амфибии (лягушки)	38,2	17,4
Рептилии (ящерицы и др.)	1,6	0
Рыбы	30,4	38,0
Насекомые	10,8	2,6
Рак речной	2,8	1,3
Другие беспозвоночные	5,2	2,7
Растительные корма	2,8	1,3

**Размножение.** К размножению зверьки приступают во второй половине февраля. Гон происходит в конце февраля – марте. В это время увеличивается подвижность самцов и их суточный ход. Появление щенков (n = 15) регистрировали во второй половине апреля – мае. В выводках (n = 30) отмечалось 2–6 детенышей, в среднем  $3,6 \pm 0,9$ .

**Численность.** Проблема динамики численности животных в последние десятилетия занимает ведущее место в экологических исследованиях [8; 11; 12]. Это обусловлено не только огромной практической значимостью этой проблемы, но и тем, что динамика численности отражает всю сумму реакций популяций на комплекс внешних и внутренних факторов. Состояние популяции американской норки может быть индикатором состояния окружающей среды в целом, отображать характер воздействия антропогенного фактора на экосистемы региона.

Американская норка в Беларуси относится к охотничьим видам. За многие десятилетия популяция норки в какой-то степени адаптировалась к воздействию охоты. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при оценке роли охоты в динамике численности и разработке мероприятий по рациональной эксплуатации вида.

Данные о численности американской норки в Беларуси и регионе на конец XX в. приведены в монографиях [8; 12]. В Беларуси численность американской норки не пре-



терпевае значительных изменений, в последние годы прослеживается тренд увеличения. Строгой периодичности в колебаниях численности не выявлено.

По данным зимнего маршрутного учета, плотность особей американской норки на 1 000 га общей площади в долинах рек в различные годы значительно колебалась. Так, в Березинском р-не Минской области в долине р. Уша (д. Котово – д. Мощаница, протяженность маршрута 10 км, 12 учетов) она варьировала в пределах 0,8–4,0 экз., в среднем  $2,4 \pm 0,5$ ; в Брестском р-не в долине р. Лесная (д. Тюхиничи – дачный поселок Леснянка, протяженность маршрута 12 км, 14 учетов) – 0,8–2,6 экз., в среднем  $1,8 \pm 0,8$ ; в этом же районе в долине р. Западный Буг (д. Орхово – д. Томашовка, протяженность маршрута 11 км, 8 учетов) – 0,9–3,2 экз., в среднем  $1,8 \pm 1,3$ ; в Ивацевичском р-не в долине р. Гривда (д. Любищицы – д. Саневичи, протяженность маршрута 7 км, 8 учетов) – 1,1–2,9 экз., в среднем  $1,9 \pm 1,4$ . Эти данные близки к данным плотности американской норки в соответствующих районах Беларуси: с 1990-х гг. плотность зверьков в юго-западной и центральной Беларуси на 1 000 га водно-болотных охотугодий в большинстве районов редко выходила за пределы 5,1–7,0 ос. [8].

Рассмотрим численность и изъятие американской норки в Беларуси. В 1973–1998 гг. в Брестской области численность американской норки колебалась в пределах 20–660 ос. Ежегодно добывалось в среднем  $216,2 \pm 41,7$  ос. [12]. В последующие годы численность и добыча американской норки увеличивалась.

По данным Брестской областной организационной структуры республиканского государственно-общественного объединения «Белорусское общество охотников и рыболовов», численность американской норки в охотхозяйствах Брестской области в 2000–2019 гг. варьировала от 575 (2000 г.) до 2 344 ос. (2019 г.), в последние 5 лет численность вида не опускалась ниже 2 000 ос. Американская норка относится к ненормируемым видам, интенсивность изъятия зверя была наименьшей в 2004 г. (13,4 %) и 2019 г. (13,6 %), наибольшей – в 2007 г. (57,2 %). В Беларуси численность зверьков в 2000–2018 гг. варьировала от 16,1 до 24,5 тыс. ос. с тенденцией постепенного роста, ежегодно охотники добывали от 1,7 до 4,0 тыс. ос. (8,3–17,8 %) (рисунок).

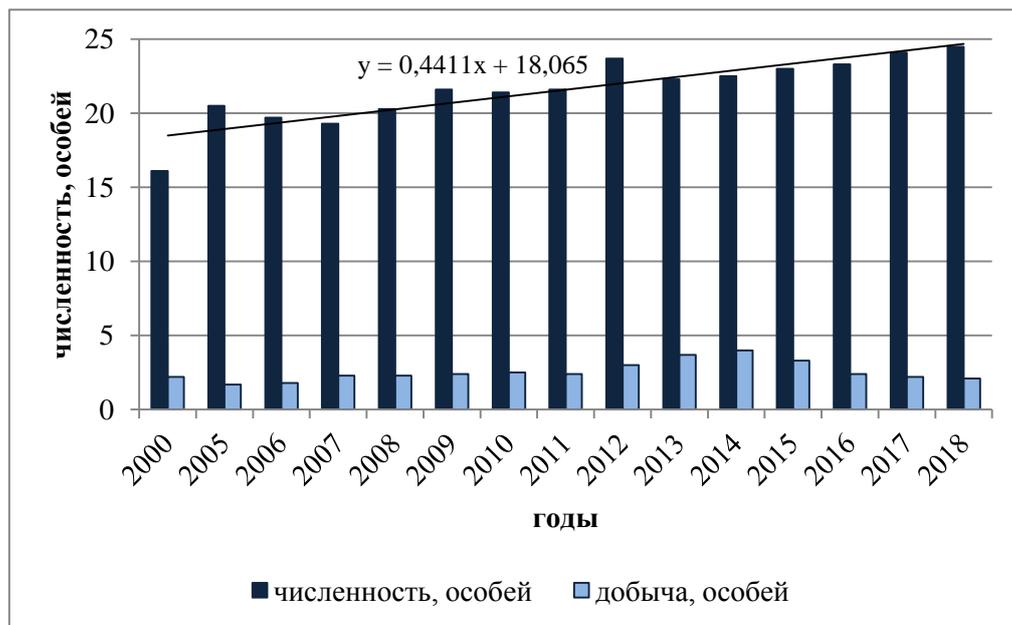


Рисунок. – Численность и добыча американской норки в Беларуси (по [13; 14])



Американская норка – ценный пушной зверь, который занял экологическую нишу европейской норки. Экологи и охотоведы пришли к выводу [12; 16; 17], что для нормального существования охотничьих зверей, в т. ч. и американской норки, с помощью целенаправленного рационального промысла можно в определенной степени управлять популяциями животных в интересах не только человека, но и самих популяций.

### Заклучение

Американская норка в Беларуси и регионе является широко распространенным видом. Предпочитает селиться вблизи поселений человека, на берегах водоемов и в долинах рек. Активность норки приходится на дневное и ночное время суток во все сезоны года. Основу кормового рациона вида составляют млекопитающие (мелкие грызуны), амфибии и рыбы. На долю млекопитающих в летний период приходится 38,6 % от исследованных проб, в зимний период – 50,3 % проб. Амфибии встречаются в 38,2 % проб летом и 17,4 % зимой. Рыбы чаще поедаются зимой (38,0 %), чем летом (30,4 %). На долю птиц приходится соответственно 8,2 и 4,5 % исследованных проб. Численность американской норки варьирует по годам, в последнее десятилетие прослеживается тренд увеличения.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шиляева, Л. М. Ресурсы основных видов пушных зверей в СССР и их использование / Л. М. Шиляева, Н. Н. Бакеев // Промысловая териология : сб. ст. – М. : Наука, 1982. – С. 5–27.
2. Приклонский, С. Г. Зимний маршрутный учет охотничьих животных / С. Г. Приклонский // Тр. Окского гос. заповедника. – Рязань, 1973. – Вып. IX : Методы учета охотничьих животных в лесной зоне. – С. 35–62.
3. Терновский, Д. В. Количественный учет норки и выдры / Д. В. Терновский // Тр. Окского гос. заповедника. – Рязань, 1973. – Вып. IX : Методы учета охотничьих животных в лесной зоне. – С. 144–161.
4. Новиков, Г. А. Полевые исследования по экологии наземных позвоночных / Г. А. Новиков. – М. : Совет. наука, 1953. – 502 с.
5. Блоцкая, Е. С. Популяционная экология мелких млекопитающих юго-западной и центральной Беларуси / Е. С. Блоцкая, В. Е. Гайдук. – Брест : Изд-во БрГУ, 2004. – 187 с.
6. Данилов, П. И. Куньи Северо-Запада СССР / П. И. Данилов, И. Л. Туманов. – Л. : Наука, 1976. – 256 с.
7. Туманов, И. Л. Редкие хищные млекопитающие России (мелкие и средние виды) / И. Л. Туманов. – СПб. : Бранко, 2009. – 448 с.
8. Савицкий, Б. П. Млекопитающие Беларуси / Б. П. Савицкий, С. В. Кучмель, Л. Д. Бурко // Млекопитающие Беларуси. – Минск : Изд. центр БГУ, 2005. – 319 с.
9. Сидорович, В. Е. Норки, выдра, ласка и другие куньи / В. Е. Сидорович. – Минск : Ураджай, 1995. – 191 с.
10. Сидорович, В. Е. Эволюционная биология, демография и закономерности формирования биоценологических связей ассамблеи куньих (*Mustelidae*) в естественных и антропогенных ландшафтах Беларуси : автореф. дис. ... д-ра биол. наук : 03.00.08 / В. Е. Сидорович ; Ин-т зоологии АН Респ. Беларусь. – Минск, 1997. – 35 с.
11. Максимов, А. А. Многолетние колебания численности животных, их причины и прогноз / А. А. Максимов. – Новосибирск : Наука, 1984. – 250 с.



12. Биология промыслово-охотничьих наземных позвоночных Брестской области / В. Е. Гайдук [и др.]. – Брест : БГУ, 1999. – 134 с.
13. Охрана окружающей среды в Республике Беларусь : стат. сб. / Нац. стат. ком. Респ. Беларусь ; пред. редкол. И. С. Кангро. – Минск, 2012. – 258 с.
14. Охрана окружающей среды в Республике Беларусь : стат. сб. / Нац. стат. ком. Респ. Беларусь ; пред. редкол. И. В. Медведева. – Минск, 2019. – 200 с.
15. Гайдук, В. Е. Годовые и многолетние биоритмы млекопитающих Беларуси (на примере модельных охотничьих видов) : монография / В. Е. Гайдук. – Брест : Изд-во БрГУ, 2005. – 192 с.
16. Глушков, В. М. Управление популяциями охотничьих животных / В. М. Глушков, Н. Н. Граков, И. С. Козловский. – Киров, 1999. – 211 с.
17. Гуринович, А. Проблемы управления ресурсами охотничьей фауны в Беларуси, пути их решения / А. Гуринович // Актуальные проблемы зоологической науки в Беларуси : сб. ст. XI Зоол. междунар. науч.-практ. конф., приуроч. к десятилетию основания ГНПО «НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам» – Минск : Изд. А. Н. Вараксин, 2017. – С. 85–95.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 05.06.2020*



УДК 633.111.1:631.8

**Светлана Михайловна Ленивко**

канд. биол. наук, доц., доц. каф. зоологии и генетики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Svetlana Lenivko**

PhD in Biological Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor Department of Zoology and Genetics  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: zoology@brsu.brest.by

### **ВЛИЯНИЕ СТЕРОИДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА РОСТ ОСЕВЫХ ОРГАНОВ ПРОРАСТАЮЩИХ СЕМЯН МЯГКОЙ ПШЕНИЦЫ СОРТА ВАСИЛИСА В УСЛОВИЯХ ХЛОРИДНОГО ЗАСОЛЕНИЯ\***

*Представлены экспериментальные данные по исследованию влияния brassinosterоидов и стероидных гликозидов на рост осевых органов прорастающих семян *Triticum aestivum* L. сорта Василиса в условиях хлоридного засоления. Обнаружено, что стероидные гликозиды на фоне NaCl в концентрации 150 ммоль/дм<sup>3</sup> проявили большую активность по стимулированию роста надземной части проростков и корней пшеницы сорта Василиса по сравнению с brassinosterоидами.*

#### ***The Effect of Steroid Compounds on the Growth of the Axial Organs of Germinating Seeds of Soft Wheat of the Cultivar Vasilisa under Conditions of Chloride Salinity***

*The article presents experimental data on the effect of brassinosterоids and steroid glycosides on the growth of the axial organs of the germinating seeds of *Triticum aestivum* L. of the cultivar Vasilisa under the conditions of conditions of chloride salinity. It was found that steroid glycosides against a background of NaCl at a concentration of 150 mmol/l showed greater activity in stimulating the growth of the aerial parts of seedlings and roots of the cultivar Vasilisa variety compared to brassinosterоids.*

#### **Введение**

Засоление почв, засуха, экстремальные температуры и окислительный стресс – основные причины потерь продуктивности сельскохозяйственных растений, часто приводящие к снижению урожайности культур более чем на 50 % [1]. Общие тенденции потепления климата и микроклиматические изменения, связанные с мелиорацией, порождают возникновение засух и увеличение солончакового процесса. Распространенность почв с повышенным присутствием солей представляет серьезную проблему для сельскохозяйственного производства. Засоление почв связано с наличием большого количества главным образом натриевых солей в ризогенном слое. Среди солей натрия самым токсичным для растений считается хлоридное засоление. Большинство культурных растений не могут расти при концентрациях хлорида натрия более 400 ммоль/дм<sup>3</sup> [1]. Критические концентрации натрия и хлора в клетках, при которых проявляются токсические эффекты, точно не определены. Однако в опытах *in vivo* показано ингибирование активности большинства ферментов при концентрации ионов натрия и хлора менее 100 ммоль/дм<sup>3</sup> [2]. Высшие растения имеют механизмы защиты от воздействия стрессового фактора на уровне интактного растения и на клеточном уровне. Стрессовый фак-

\*Работа выполнена в рамках НИР «Оценка морфофизиологической и генетической активности brassinosterоидов и стероидных гликозидов для расширения спектра действия биорегуляторов растений стероидной природы» № ГР 20160577 от 01.04.2016 по заданию 3.15 ГПНИ «Химический синтез и продукты» (2016–2020 гг.).



тор активіруе ўключэнне ў клетцы адветных рэакцый, абумоўленых многімі генамі, звязаных з сінтэзам стрэсавых бялкоў, удзельнічаючых у перадачы сігнала, і анти-оксидантаў, нейтралізуючых свабодныя радыкалы, а таксама з назапленнем осмапротектараў, здольных ствараць градыент для паглынання вады. Такім чынам, павышэнне ўстойлівасці раслін да солевага стрэсу, актуальнай з'яўляецца оптымізацыя генетычна перадаваемых параметраў метадамі традыцыйнай адаптыўнай селекцыі, а таксама прымяненне прыродных і сінтэтычных рэгуляраў росту раслін пры апрацоўцы сям'янаў і пасеваў [3]. Актыўнасць брасіностероідаў (БС) і стероідных глікозідаў (СГ) у адносінах да розных фізіялагічных працэсаў абумоўлівае ўзростаўшы к ім інтарэс як да эфектыўным сродкам для павышэння неспецыфічнай ўстойлівасці да засалення ў шэрагу сельскагаспадарчых культур, у т. ч. і злакаў. Прадставленыя ў навучнай літаратуры даныя аб патэнцыяльных магчымасцях выкарыстання стероідных злучэнняў у ўмовах солевага стрэсу [4] паказваюць на перспектывнасць правядзення далейшых даследаванняў іх біялагічнай актыўнасці і практычнага прымянення. Вынікі даследаванняў многіх аўтараў паказалі, што індукцыя БС і СГ рэгуляцыя фізіялагічных эфектаў залежыць ад відавых і нават сортовых асаблівасцей раслін. Гэта паказвае на неабходнасць эксперыментальным шляхам усталяваць адаптагенны эфект злучэнняў да засалення.

Мэтай нашых даследаванняў – параўнальны аналіз уплыву дыяпазона канцэнтрацый ( $10^{-9}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-7}$  %) шэрагу брасіностероідаў (БС) і стероідных глікозідаў (СГ) на роставыя паказальнікі асевых органаў (надземнай часткі праростка і каранёў) пры прарастанні сям'янаў м'якай пшаніцы сорту Васіліса на фоне хларыднага засалення.

### Матэрыял і метады

Аб'ект даследавання – сорт Васіліса м'якай яровой пшаніцы [5]. Матэрыялам даследавання з'яўляліся сям'яна ў колькасці 150 штук у кожным варыянце апыта. Паўторнасць апыта была трыкратнай. Пастаўка эксперыменту ажыццяўлялася з выкарыстаннем метадыкі вызначэння ўсхожасці сям'янаў сельскагаспадарчых культур ГОСТ 12038-84. Прадварна сям'яна дэзынфіцыравалі 30 % растворам гіпахларыта натрыя ў тэрмін 10 хвілін. Сям'яна праращвалі ў тэрмастаце рулонным метадам пры тэмпературы 22 °С. На 7 суткі вымяралі даўжыню надземнай часткі праростка і даўжыню каранёў.

Апытантыя варыянты – растворы БС (эпібрасіноліда – ЭБ, гомобрасіноліда – ГБ, эпікастэраона – ЭК) і СГ (мелонгазіда – МЗ, нікотыянозіда – НЗ, русікозіда – РЗ) у канцэнтрацыях адпаведна  $10^{-9}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-7}$  % на фоне NaCl у канцэнтрацыях адпаведна 0 ммоль/дм<sup>3</sup>, 50 ммоль/дм<sup>3</sup>, 100 ммоль/дм<sup>3</sup>, 150 ммоль/дм<sup>3</sup>. У якасці кантроля выкарыстоўвалі NaCl у канцэнтрацыях 0 ммоль/дм<sup>3</sup>, 50 ммоль/дм<sup>3</sup>, 100 ммоль/дм<sup>3</sup>, 150 ммоль/дм<sup>3</sup>.

Статыстычную апрацоўку атрыманых вынікаў праводзілі згодна метадам біялагічнай статыстыкі [6] з выкарыстаннем праграмы MS Excel. Дастовэрнасць розніц варыянтаў апыта па адносінах да кантролю вызначалі з дапамогай t-крытэрыя Ст'юдэнта пры  $P \leq 0,05$ . Двухфактарны дысперсійны аналіз прымянялі для комплекснай ацэнкі атрыманых сярэдніх значэнняў па варыянтам апыта.

### Вынікі даследавання і іх абсуджэнне

Атрыманыя вынікі паказалі, што на 7 суткі ад пачатку засалення выражанае падаўленне росту надземнай часткі праростка на 43 % і каранёў на 53 % назіралася пры 150 мМ NaCl па параўнанню з асевымі органамі, сфарміраванымі пры прарастанні сям'янаў пшаніцы сорту Васіліса за гэты перыяд у адсутнасці солі (табліца 1). За тое жа



время действие минимальной ( $50 \text{ ммоль/дм}^3$ ) из используемых нами концентраций NaCl положительно сказалось на росте надземной части проростка, увеличив их длину на 44 %. При этом корни проявили меньшую отзывчивость к присутствию  $50 \text{ mM NaCl}$ , их длина оказалась только на 5 % больше по сравнению с контролем ( $0 \text{ mM NaCl}$ ). На фоне  $100 \text{ mM NaCl}$  рост осевых органов незначительно отличался от контроля.

Таблица 1. – Динамика изменения длин надземной части проростка и корней в контроле у пшеницы сорта Василиса

Время эксперимента	Длина, см		Концентрация NaCl, mM
	проростка	корней	
7-е сутки	$10,39 \pm 1,51$	$9,75 \pm 1,05$	0
	$14,93 \pm 1,46$	$10,19 \pm 0,48$	50
	$10,78 \pm 0,85$	$9,03 \pm 0,39$	100
	$5,88 \pm 1,12$	$4,56 \pm 0,41$	150

Полученные результаты исследований влияния на 7-е сутки шести стероидных соединений в трех концентрациях ( $10^{-7}$ ,  $10^{-8}$ ,  $10^{-9}$  %) на рост осевых органов при прорастиании семян пшеницы сорта Василиса в условиях моделируемого солевого стресса представлены в таблицах 2 и 3.

Таблица 2. – Варьирование длины надземной части проростка у пшеницы сорта Василиса под влиянием стероидных соединений на 7-е сутки на фоне NaCl

Стероидное соединение	Концентрация стероидного соединения, %			Концентрация NaCl, ммоль/дм <sup>3</sup>
	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$	
ЭБ	$16,09 \pm 0,77^*$	$17,75 \pm 0,22^*$	$12,63 \pm 0,67$	0
	$15,11 \pm 0,45$	$16,19 \pm 0,42$	$15,02 \pm 0,68$	50
	$10,22 \pm 1,73$	$9,34 \pm 1,77$	$7,82 \pm 1,16^*$	100
	$7,48 \pm 1,06$	$6,76 \pm 1,22$	$6,35 \pm 1,31$	150
ГБ	$12,75 \pm 0,94$	$12,55 \pm 1,0$	$13,73 \pm 0,80^*$	0
	$15,1 \pm 1,03$	$12,95 \pm 1,25$	$13,91 \pm 1,22$	50
	$9,22 \pm 2,31$	$6,73 \pm 2,12$	$9,12 \pm 0,60$	100
	$3,30 \pm 1,78$	$4,32 \pm 1,14$	$6,03 \pm 1,16$	150
ЭК	$12,92 \pm 0,72$	$12,23 \pm 0,48$	$12,01 \pm 0,78$	0
	$15,01 \pm 0,96$	$15,32 \pm 0,91$	$14,48 \pm 0,87$	50
	$7,83 \pm 1,22^*$	$11,25 \pm 0,76$	$7,96 \pm 1,93$	100
	$4,58 \pm 1,42$	$6,74 \pm 1,13$	$7,39 \pm 0,89$	150
МЗ	$11,67 \pm 0,79$	$12,54 \pm 0,69$	$11,01 \pm 1,20$	0
	$14,59 \pm 0,80$	$14,25 \pm 0,78$	$15,36 \pm 1,27$	50
	$9,45 \pm 1,21$	$9,92 \pm 1,01$	$7,86 \pm 1,29$	100
	$6,04 \pm 1,26$	$8,53 \pm 2,20$	$8,74 \pm 1,59$	150
НЗ	$13,36 \pm 0,63$	$11,65 \pm 0,57$	$11,97 \pm 0,71$	0
	$13,87 \pm 1,03$	$15,02 \pm 0,72$	$13,41 \pm 1,40$	50
	$9,81 \pm 0,94$	$9,78 \pm 1,13$	$10,88 \pm 1,54$	100
	$10,60 \pm 1,07^*$	$8,40 \pm 1,36$	$7,85 \pm 1,26$	150
РЗ	$12,01 \pm 0,96$	$10,69 \pm 0,85$	$12,19 \pm 0,85$	0
	$14,87 \pm 1,14$	$14,39 \pm 0,63$	$12,92 \pm 1,44$	50
	$10,20 \pm 1,04$	$8,17 \pm 0,93^*$	$10,32 \pm 0,91$	100
	$11,88 \pm 1,16^*$	$9,72 \pm 0,83^*$	$8,60 \pm 1,67$	150

Примечание – \* – достоверно при  $P \leq 0,05$ .



Результаты влияния стероидных соединений на изменение длины надземной части проростка у пшеницы сорта Василиса в отсутствие соли (таблица 2) показали, что на 7-е сутки во всех вариантах эксперимента наблюдалось увеличение их роста по сравнению с контролем (0 мМ NaCl). Однако статистически достоверное влияние установлено только в отношении ЭБ в концентрациях  $10^{-9}$  и  $10^{-8}$  %, а также ГБ в концентрации  $10^{-7}$  %. Статистически значимое превышение данных контроля по длине надземной части проростков составило 5,70, 7,36 и 3,34 см соответственно. Дисперсионный анализ показал достоверное влияние вещества по стимулированию роста надземной части проростков сорта Василиса в условиях отсутствия соли с вероятностью  $P \leq 0,05$ , что позволило построить следующие ряды активности стероидных соединений, где знак «>» отражает разницу в более чем 0,5 см, знак « $\geq$ » – разницу в 0,5 см и менее с предыдущим стероидным соединением в ряду. Различия между первым и последним соединениями, заключенными в квадратные скобки, не превышали 0,5 см:

- 1) в концентрации  $10^{-9}$  %: ЭБ > [НЗ  $\geq$  ЭК  $\geq$  ГБ] > [РЗ  $\geq$  МЗ];
- 2) в концентрации  $10^{-8}$  %: ЭБ > [ГБ  $\geq$  МЗ  $\geq$  ЭК] > НЗ > РЗ;
- 3) в концентрации  $10^{-7}$  %: ГБ > [ЭБ  $\geq$  РЗ  $\geq$  ЭК  $\geq$  НЗ] > МЗ.

В целом БС показали большую активность по стимулированию роста надземной части проростков пшеницы сорта Василиса по сравнению со СГ в отсутствие NaCl.

Таблица 3. – Варьирование длины корней у пшеницы сорта Василиса под влиянием стероидных соединений на 7-е сутки на фоне NaCl

Стероидное соединение	Концентрация стероидного соединения, %			Концентрация NaCl, ммоль/дм <sup>3</sup>
	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$	
ЭБ	9,44 ± 1,08	9,73 ± 1,22	9,17 ± 1,68	0
	10,93 ± 0,34	11,31 ± 0,22*	9,07 ± 0,22*	50
	7,90 ± 0,39*	8,28 ± 0,53	8,09 ± 0,42	100
	5,42 ± 0,36	5,77 ± 0,30*	4,47 ± 0,36	150
ГБ	10,97 ± 1,70	9,36 ± 1,51	8,93 ± 0,53	0
	11,02 ± 0,25	9,97 ± 0,37	9,82 ± 0,34	50
	7,03 ± 0,70*	6,64 ± 0,65*	7,90 ± 0,34*	100
	3,51 ± 0,59	4,54 ± 0,50	5,20 ± 0,44	150
ЭК	10,55 ± 0,48	10,32 ± 1,51	10,59 ± 0,50	0
	11,11 ± 0,31	10,88 ± 0,37	10,28 ± 0,28	50
	5,58 ± 0,46*	7,82 ± 0,48*	6,08 ± 0,43*	100
	3,81 ± 0,43	5,55 ± 0,16*	5,36 ± 0,13	150
МЗ	9,83 ± 0,41	7,94 ± 0,54	9,01 ± 0,56	0
	10,37 ± 0,21	9,52 ± 0,29	9,36 ± 0,35	50
	7,90 ± 0,42*	8,26 ± 0,48	7,09 ± 0,43*	100
	5,53 ± 0,39	5,65 ± 0,55	6,69 ± 0,28*	150
НЗ	10,46 ± 0,28	11,50 ± 0,35	8,79 ± 0,61	0
	9,35 ± 0,33	10,61 ± 0,22	7,50 ± 0,30	50
	7,46 ± 0,31*	8,38 ± 0,36	8,64 ± 0,24	100
	6,88 ± 0,26*	6,16 ± 0,34*	5,38 ± 0,23	150
РЗ	7,58 ± 0,80	8,94 ± 0,42	8,94 ± 0,45	0
	9,78 ± 0,29	9,79 ± 0,29	8,86 ± 0,40*	50
	7,35 ± 0,37*	7,84 ± 0,41*	8,67 ± 0,33	100
	6,16 ± 0,33*	6,54 ± 0,25*	6,93 ± 0,50*	150

Примечание – \* – достоверно при  $P \leq 0,05$ .



Анализ изменения длины корней у пшеницы сорта Василиса на 7-е сутки в бес-солевых условиях показал, что из 18 вариантов опыта, только в шести стероидные соединения проявили стимулирующий эффект по отношению к росту корней, хотя и статистически недостоверный (таблица 3). Этими вариантами оказались ЭК в концентрациях  $10^{-9}$ ,  $10^{-8}$  и  $10^{-7}$  %, ГБ в концентрации  $10^{-7}$  %, НЗ в концентрациях  $10^{-9}$  и  $10^{-8}$  %. Дисперсионный анализ не установил достоверного влияния вещества по показателю «длина корня», что не позволило составить ряд зависимости действия стероидных соединений.

При фоновом засолении NaCl в концентрации 50 ммоль/дм<sup>3</sup> добавление растворов стероидных соединений в различных концентрациях не оказало существенного влияния на изменение длины надземной части проростков и длины корней более чем на 10 % по сравнению с контролем при прорастании семян пшеницы сорта Василиса на 7-е сутки эксперимента. Было отмечено, что на фоне NaCl 50 мМ положительное действие на рост осевых органов оказали преимущественно БС. В тоже время применение растворов стероидных соединений при усилении хлоридного засоления до 100 ммоль/дм<sup>3</sup> приводило, как правило, к торможению ростовых процессов.

Результаты влияния стероидных соединений в условиях высокого содержания NaCl показали, что на 7-е сутки в 15 вариантах эксперимента наблюдалось увеличение длины надземной части проростков сорта Василиса по сравнению с контролем. СГ при фоновом засолении NaCl в концентрации 150 ммоль/дм<sup>3</sup> проявляли стимулирующий эффект во всех вариантах эксперимента по сравнению с контролем. Наибольший статистически достоверный стимулирующий эффект показал РЗ в концентрации  $10^{-9}$  %, превышение данных контроля по длине проростков составило 6,0 см. Достоверное влияние установлено также в отношении РЗ в концентрации  $10^{-8}$  % и НЗ в концентрации  $10^{-9}$  % по отношению к контролю. Статистически значимое превышение данных контроля по длине надземной части проростков составило на 3,84 и 4,72 см соответственно. БС на фоне 150 мМ NaCl проявили стимулирующее действие по отношению к росту проростков, за исключением ЭК в концентрации  $10^{-9}$  % и ГБ в концентрациях  $10^{-9}$  и  $10^{-8}$  %. Дисперсионный анализ показал достоверное влияние вещества по стимулированию роста надземной части проростков сорта Василиса на фоне 150 мМ NaCl с вероятностью  $P \leq 0,01$ , что позволило построить следующие ряды активности стероидных соединений:

- 1) в концентрации  $10^{-9}$  %: РЗ > НЗ > ЭБ > МЗ;
- 2) в концентрации  $10^{-8}$  %: РЗ > [МЗ ≥ НЗ] > [ЭБ ≥ ЭК];
- 3) в концентрации  $10^{-7}$  %: [МЗ ≥ РЗ] > [НЗ ≥ ЭК] > [ЭБ ≥ ГБ].

В целом СГ показали большую активность по стимулированию роста проростков пшеницы сорта Василиса по сравнению с БС на фоне 150 мМ NaCl.

Добавление стероидных соединений на фоне 150 мМ NaCl положительно сказалось на росте корней. Так в 15 вариантах опыта наблюдалось стимулирование роста корней, а в 8 вариантах превышение данных контроля оказалось достоверным. В варианте опыта с ГБ в концентрации  $10^{-8}$  % данные оказались на уровне контроля. Наибольший статистически достоверный стимулирующий эффект показал РЗ в концентрации  $10^{-7}$  %, превышение данных контроля по длине проростков составило на 2,37 см. Дисперсионный анализ показал достоверное влияние вещества по стимулированию роста корней сорта Василиса на фоне NaCl в концентрации 150 ммоль/дм<sup>3</sup> с вероятностью  $P \leq 0,05$ , что позволило построить следующие ряды активности стероидных соединений:

- 1) в концентрации  $10^{-9}$  %: НЗ > РЗ > [МЗ ≥ ЭБ];
- 2) в концентрации  $10^{-8}$  %: [РЗ ≥ НЗ] ≥ [ЭБ ≥ МЗ ≥ ЭК];
- 3) в концентрации  $10^{-7}$  %: [РЗ ≥ МЗ] > [НЗ ≥ ЭК ≥ ГБ].



В целом СГ на фоне NaCl в концентрации 150 ммоль/дм<sup>3</sup> также показали большую активность по стимулированию роста корней пшеницы сорта Василиса по сравнению с БС.

### Заклучение

Таким образом, проведенный сравнительный анализ влияния БС и СГ на рост осевых органов прорастающих семян *Triticum aestivum* L. сорта Василиса на 7-е сутки эксперимента позволил установить статистически достоверное положительное влияние вещества на увеличение длины надземной части проростков в бессолевых условиях с вероятностью  $P \leq 0,05$ . Составленный ряд активности стероидных соединений выявил большую активность БС по стимулированию роста проростков по сравнению со СГ в условиях отсутствия NaCl. В моделируемых условиях солевого стресса стероидные соединения снижали негативное влияние NaCl в концентрации 150 мМ на начальном этапе развития осевых органов при прорастании семян сорта Василиса. Дисперсионный анализ установил достоверное влияние вещества по усилению роста надземной части проростков и корней сорта Василиса на фоне NaCl 150 мМ, что позволило построить ряды активности стероидных соединений по каждой испытанной концентрации. Обнаружено, что СГ на фоне NaCl в концентрации 150 ммоль/дм<sup>3</sup> проявили большую активность по стимулированию роста надземной части проростков и корней пшеницы сорта Василиса по сравнению с БС.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Flowers, T. J. Improving Crop Salts Tolerance / T. J. Flowers // J. of Experimental Bot. – 2004. – Vol. 55. – P. 307–319.
2. Битюцкий, Н. П. Растения в условиях засоления / Н. П. Битюцкий // Минеральное питание растений / Н. П. Битюцкий. – СПб., 2014. – С. 429–444.
3. Ленивко, С. М. Генно-инженерный подход в создании новых форм растений, устойчивых к абиотическим факторам / С. М. Ленивко // Вучон. зап. Брест. ун-та. – 2019. – Вып. 15, ч. 2. – С. 67–72.
4. Ленивко, С. М. О проблеме повышения устойчивости растений к солевому стрессу и перспективности использования стероидных соединений / С. М. Ленивко // Менделеевские чтения – 2019 : материалы Респ. науч.-практ. конф. по химии и хим. образованию, Брест, 22 февр. 2019 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; редкол.: Э. А. Тур, Н. Ю. Колбас, Н. С. Ступень ; под общ. ред. Н. Ю. Колбас. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 95–99.
5. Государственный реестр сортов и древесно-кустарниковых пород [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sorttest.by/gosudarstvennyy-reyestr-sortov-2017-1>.
6. Рокицкий, П. Ф. Биологическая статистика / П. Ф. Рокицкий. – 3-е изд., испр. – Минск : Выш. шк., 1973. – 320 с.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 29.06.2020



УДК 581.824

**Наталья Михайловна Матусевич**

канд. биол. наук, доц. каф. ботаники и экологии

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Natalya Matusevich**

PhD in Biological Sciences, Associate Professor,

Associate Professor of the Department of Botany and Ecology

of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: botany@brsu.brest.by

## СРАВНИТЕЛЬНО-АНАТОМИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ СТРОЕНИЯ КОРЫ ОДНОЛЕТНЕГО СТЕБЛЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ РОДА *CRATAEGUS* L.

Проведено сравнительное изучение анатомического строения коры однолетнего стебля семи представителей рода *Crataegus* L. – *Crataegus altaica* (Loud.) Lange, *Crataegus dahurica* Koehne and Schneid., *Crataegus arnoldiana* Sarg., *Crataegus hissarica* Pojark., *Crataegus almaatensis* Pojark., *Crataegus pseudoheterofylla* L., *Crataegus oxyacantha* L. Выявлены признаки, которые могут быть использованы в качестве диагностических: характер утолщения клеточных стенок и связанную с этим форму полостей клеток феллемы, отсутствие волосков и слущивание кутикулы у эпидермы к концу первого года жизни стебля, развитие колленхимы, рыхлое сложение коровой паренхимы, отсутствие феллодермы в составе перидермы. Для видовой диагностики могут быть использованы: тип механического кольца, форма кристаллов оксалата кальция и характер их размещения в кристаллоносной обкладке.

### *Comparative-Anatomical Study of the Structure of the One-Year-Old Stem Crust of Some Species of the Genus CRATAEGUSL.*

A comparative study of the anatomical structure of the bark of the annual stem of seven representatives of the genus *Crataegus* L. – *Crataegus altaica* (Loud.) Lange, *Crataegus dahurica* Koehne and Schneid., *Crataegus arnoldiana* Sarg., *Crataegus hissarica* Pojark., *Crataegus almaatensis* Pojark., *Crataegus pseudoheterofylla* L., *Crataegus oxyacantha* L. The signs, which can be used as a diagnostic: the nature of the thickening of the cell walls and the associated shape of the cavities of the phellema cells, the absence of hairs and desquamation of the cuticle in the epidermis by the end of the first year of the stem's life, the development of collenchyma, loose addition of the crustal parenchyma, the absence of phelloderm in the peridermis. For species diagnostics, the following can be used: the type of mechanical ring, the shape of calcium oxalate crystals and the nature of their placement in the crystal-bearing sheath.

### **Введение**

Кора покрытосеменных растений, в сравнении с голосеменными, изучена недостаточно. Менее исследована она и по сравнению с древесиной. Это происходит вследствие трудностей по изготовлению препаратов (в коре много склерифицированных элементов), плохой сохранности коры в коллекционном и гербарном материалах [1].

В последние годы проводятся исследования некоторых покрытосеменных [2; 3], а также для ряда семейств: ивовые [4], вересковые [5], буковые [6], маслинные [7], – в которых описывается кора как система тканей. Изучены сезонные изменения коры [8], ее возрастные преобразования у некоторых розоцветных [9].

Современная систематика растений для решения спорных вопросов широко использует достижения других наук: морфологии, анатомии, физиологии, карпологии. Поскольку кора стебля древесных растений включает в себя различные ткани как первичного происхождения (эпидерму, колленхиму, коровую паренхиму, кольцо первичных механических тканей, первичную флоэму), так и вторичные ткани (перидерму, вторич-



ную флоэму), она содержит большое количество признаков, которые можно интерпретировать как диагностические, и анатомические особенности строения коры широко используются для решения вопросов систематики и голосеменных [10; 11], и покрытосеменных растений [12; 13].

Кора стебля выполняет в нем ряд важных функций: защитную, транспортную, ассимиляционную, механическую, запасующую, синтетическую. Поскольку гистологический состав коры более разнообразен, чем древесины, этот сложный комплекс тканей обладает большим набором диагностических признаков и может использоваться для решения вопросов филогении и таксономии, научной и судебно-криминалистической диагностики.

Доказана возможность использования признаков анатомии коры для уточнения объемов семейств, разделения их на таксоны более низких рангов, расширения кодекса родовых и видовых признаков [5; 12; 13]. Кроме того, анатомический анализ имеет большое значение для целей селекции, экологического мониторинга и оценки окружающей среды.

Цель работы – провести сравнительное изучение анатомического строения коры однолетнего стебля представителей рода *Crataegus* L. и выявить их диагностические признаки.

#### **Материал и методы исследования**

Было проведено сравнительное изучение анатомического строения коры однолетних стеблей семи представителей рода *Crataegus* L.: *Crataegus altaica* (Loud.) Lange, *Crataegus dahurica* Koehne and Schneid., *Crataegus arnoldiana* Sarg., *Crataegus hissarica* Pojark., *Crataegus almaatensis* Pojark., *Crataegus pseudoheterophylla* L., *Crataegus oxyacantha* L.

Выполнение работы предусматривало сбор полевого материала, его фиксацию, изготовление временных и постоянных препаратов и их анализ. Материал для исследования был собран в ноябре, когда камбий находился в недейтельном состоянии и зафиксирован в смеси 96 %-го спирта и глицерина (1:1). Однолетние стебли представителей рода *Crataegus* L. брали с трех особей из нижней части кроны с южной стороны растения. Затем, после 10-дневной выдержки в фиксаторе, готовили постоянные препараты по общепринятой в анатомии растений методике [14]. Для этого фиксированный материал помещали в воду на 20–30 мин., чтобы спирт из материала диффундировал в растворитель.

Из верхних, средних и нижних междоузлий стебля готовили микрообразцы, которые использовали для получения срезов. Для постоянных препаратов их изготавливали на санном микротоме с замораживающим столиком, для изготовления временных препаратов срезы делали от руки с использованием лезвия и сердцевины бузины.

Срезы толщиной 10–30 мкм выполняли в поперечном и продольном радиальном и продольном тангентальном направлениях. Затем их помещали в сафранин на 20 мин., после чего переносили в нильский синий на 3 мин. Далее срезы проводили через серию спиртов разных концентраций (50, 70, 96 % и абсолютный спирт). После этого срезы обрабатывали карболксиллом, ксиллом, затем заключали в канадский бальзам.

Анализ полученных препаратов проводили на световых микроскопах. Измерения осуществляли винтовым окулярным микрометром МОВ-1-15, визированным по объективной линейке.



### Результаты исследования

Кора изученных видов рода *Crataegus* L. состоит из эпидермы, перидермы, колленхимы, паренхимы первичной коры, кольца механических элементов, первичной и вторичной флоэмы.

Эпидерма у всех видов однослойная. На поперечном срезе ее клетки прямоугольные, вытянутые в тангентальном направлении, иногда прямоугольно-овальные (боярышник алтайский, боярышник даурский), у боярышника алтайского, боярышника гиссарского, боярышника даурского, боярышника колючего, боярышника Арнольди наряду с указанными встречаются также неправильно-квадратные. На продольных срезах у всех видов клетки прямоугольные; у боярышника алтайского и боярышника даурского – удлинённо-прямоугольные, размер их по оси органа составляет 40–52 мкм.

Наружная стенка у боярышника гиссарского, боярышника алтайского, боярышника даурского на поперечном срезе иногда несколько выпуклая. По толщине своего целлюлозного слоя она мало отличается от такового у внутренней периклиальной, но поскольку на поверхности находится толстая кутикула, внешняя периклиальная стенка визуально по толщине кажется превосходящей остальные.

К концу первого года кутикула начинает слущиваться, а эпидермальные клетки остаются на однолетнем стебле, образуя внешний слой на поверхности лежащей под ними перидермы. У боярышника алмаатинского и боярышника Арнольди внутренние периклиальные клеточные стенки эпидермы также утолщены и в них хорошо заметны поровые каналы. Полости клеток у всех видов заполнены темно-коричневым содержимым. Трихомы отсутствуют.

Субэпидермально залегает перидерма. Она состоит из феллемы и феллогена. Феллодерма отмечена только в чечевичках у боярышника гиссарского, она однослойная.

Феллема в основном двуслойная, у боярышника гиссарского и боярышника даурского число ее клеток в одном радиальном ряду колеблется от 1 до 3. Клетки имеют сильно утолщенную внешнюю периклиальную и частично антиклинальные стенки, особенно у более молодого слоя. У боярышника колючего, боярышника алмаатинского и боярышника Арнольди во внешнем слое пробки утолщенными являются также и внутренние периклиальные стенки, при этом в них заметны многочисленные поровые каналы.

Форма клеток феллемы в поперечном сечении прямоугольная, выпукло-прямоугольная, а у боярышника ложноразнолистного встречаются клетки трапециевидной формы; у боярышника алтайского, боярышника колючего, боярышника разнолистного и боярышника даурского есть также и квадратные. Клеточные полости имеют различные очертания: выпукло-прямоугольные, куполовидные, каплевидные, седловидные и почти треугольные. По окраске содержимого клеток феллема гомогенная, а у боярышника гиссарского, боярышника алтайского, боярышника даурского и боярышника алмаатинского – гетерогенная.

Наименьший тангентальный и радиальный размеры клеток феллемы у боярышника ложноразнолистного и боярышника алмаатинского – 19–21 мкм и 14–16 мкм соответственно. Наибольший тангентальный размер клеток у боярышника гиссарского – 30–32 мкм, радиальный – у боярышника алтайского – 18–20 мкм. Феллоген однослойный, образуется из эпидермы.

Наименьшая ширина перидермы отмечена у боярышника даурского – 24–65 мкм, наибольшая – у боярышника алмаатинского – 99–130 мкм.



Колленхима сложена клетками овальной и округлой формы в поперечном сечении, в радиальном – вытянуто-овальной. У боярышника ложноразнолистного на продольных срезах встречаются также округло-квадратные. Клеточные оболочки утолщены равномерно, поэтому называть колленхиму пластинчатой, как считают Н. Б. Быкова и Фам Ван Ханг [15], представляется не совсем корректным. Анализируя проведенные исследования, можно сказать, что колленхима у изученных представителей рода *Crataegus* L. округлого типа.

Ширина ткани составляет от 30 мкм у боярышника даурского до 89 мкм у боярышника Арнольди.

В колленхиме боярышника даурского и боярышника колючего встречаются друзы, а у боярышника Арнольди – кристаллы призматической и кубической формы.

Под колленхимой располагается первичная кора. Паренхима первичной коры у всех изученных видов сложена довольно рыхло. Ширина ее на поперечном срезе колеблется от 100 мкм у боярышника даурского до 175 мкм у боярышника ложноразнолистного. Число слоев клеток – от 5 у боярышника даурского до 12 у боярышника ложноразнолистного. Ткань гомогенная, состоит в основном из овальных на поперечном срезе клеток, у боярышника колючего, боярышника Арнольди, боярышника алмаатинского и боярышника ложноразнолистного обнаружено также много округлых клеток. На радиальном срезе клетки боярышника даурского, боярышника гиссарского, боярышника колючего округло-квадратные; округлые и овальные – у боярышника Арнольди и боярышника алмаатинского; овально-прямоугольные клетки преобладают у боярышника гиссарского, боярышника ложноразнолистного, боярышника колючего, боярышника Арнольди. Оболочки клеток у большинства видов утолщены, у боярышника алтайского и боярышника даурского отмечены также клетки с тонкими оболочками.

Характерным признаком этой ткани является также наличие кристаллов оксалата кальция разнообразных форм: друзы, призматические, многогранники, кубические, ромбоидные, кристаллический песок. Не обнаружены у боярышника алтайского друзы, у боярышника даурского, боярышника алтайского, боярышника Арнольди – призматические кристаллы, у боярышника ложноразнолистного и боярышника колючего – кристаллы многогранной формы.

Глубже первичной коры располагается кольцо механических тканей. Оно почти у всех видов сплошное, гетерогенное, сложено волокнами и склереидами, а у боярышника даурского оно прерывистое, гомогенное, состоит из склеренхимы.

Ширина механического кольца на поперечном срезе неодинаковая: от 85 мкм у боярышника Арнольди до 145 мкм у боярышника гиссарского. Число слоев клеток склеренхимы – от 4 у боярышника Арнольди до 9 у боярышника гиссарского и боярышника колючего. В поперечном сечении волокна имеют форму от округлопятиугольной (боярышник гиссарский, боярышник алтайский, боярышник Арнольди) до 4-5-угольной (боярышник даурский, боярышник алмаатинский, боярышник ложноразнолистный). Наименьший диаметр склереид у боярышника алтайского – 24,4 мкм, наибольший – у боярышника ложноразнолистного – 30–33 мкм. Наименьший тангентальный размер волокон у боярышника Арнольди (9–11 мкм), наибольший – у боярышника ложноразнолистного (13–16 мкм); наименьший радиальный размер – у боярышника алмаатинского (9–10 мкм), наибольший – у боярышника гиссарского (15–17 мкм).

У всех видов к механическому кольцу приурочено формирование кристаллов оксалата кальция различной формы. Так, у боярышника гиссарского это ромбоиды, у остальных видов – кристаллы кубические, ромбоидные, призматические. Размещение



кристаллов разнообразное. У боярышника гиссарского, боярышника Арнольди, боярышника колючего они размещены в клетках, прилегающих к кольцу снаружи и изнутри; у боярышника даурского – в клетках кольца и снаружи его; у боярышника ложноразнолистного и боярышника алтайского – в кольце и в клетках, прилегающих к кольцу изнутри; у боярышника алмаатинского – с обеих сторон кольца, но большее их число в клетках кольца. Больше всего кристаллов обнаружено в кольце у боярышника ложноразнолистного.

В первичной флоэме ситовидные элементы сильно смяты, а паренхимные клетки дилатируют. Ткань трудно отличить от вторичной флоэмы в силу значительной паренхиматизации.

Вторичная флоэма состоит из проводящих элементов и паренхимы – аксиальной и горизонтальной. Ширина ткани от 80 мкм у боярышника алтайского до 205 мкм у боярышника Арнольди. Чем дальше от камбия расположены элементы, тем больше увеличиваются они в размерах. Ситовидные трубки собраны группами по 2–4 у боярышника даурского, боярышника алмаатинского и боярышника алтайского, по 4–6 у боярышника Арнольди, боярышника ложноразнолистного, боярышника гиссарского. Группы находятся в радиальных рядах. Одиночные ситовидные трубки расположены в виде тангентальных прослоек (боярышник гиссарский, боярышник алтайский, боярышник алмаатинский, боярышник Арнольди) либо диффузно (боярышник колючий). Клетки аксиальной паренхимы распределены как одиночно и диффузно, так и группами по 2–3, образуя радиальные (у боярышника алмаатинского) или тангентальные ряды (у боярышника ложноразнолистного, боярышника даурского, боярышника алтайского, боярышника гиссарского).

У боярышника алтайского, боярышника даурского, боярышника алмаатинского, боярышника ложноразнолистного, боярышника колючего ситовидных трубок больше, чем клеток аксиальной паренхимы; у боярышника гиссарского и боярышника Арнольди количество этих элементов почти одинаковое. Ситовидные трубки в поперечном сечении 4–6-угольной формы, вытянуты в тангентальном направлении; у боярышника ложноразнолистного и боярышника Арнольди встречаются округлые и овальные; извилистые очертания их отмечены у боярышника даурского, боярышника алмаатинского, боярышника колючего и боярышника Арнольди. Тангентальный размер ситовидных трубок колеблется в пределах 10–21 мкм, наименьший он у боярышника алмаатинского, а самый большой – у боярышника гиссарского и боярышника даурского. Наибольшую величину радиального размера (3,5–5 мкм) имеют ситовидные трубки у боярышника алмаатинского, а наименьшую (2–3 мкм) – у боярышника алтайского. Длина члеников ситовидных трубок колеблется в пределах от 65 мкм у боярышника ложноразнолистного до 100 мкм у боярышника гиссарского. Поперечные стенки их располагаются наклонно по отношению к продольным, иногда почти перпендикулярно. Ситовидные пластинки сложные. Число ситовидных полей 11–17 у боярышника Арнольди до 20 у боярышника алтайского, форма их округлая и квадратная; у боярышника гиссарского, боярышника алтайского, боярышника даурского и боярышника Арнольди отмечены ситовидные поля овальных очертаний.

У всех видов в клетках аксиальной паренхимы находятся призматические кристаллы щавелевокислого кальция, часто сдвоенные, а у боярышника Арнольди и боярышника колючего они могут быть сросшимися по три. Помимо указанных, реже встречаются ромбоиды (боярышник даурский, боярышник гиссарский, боярышник колючий, боярышник алтайский, боярышник алмаатинский) и кубические кристаллы (боярыш-



ник гиссарский, боярышник даурский, боярышник алмаатинский, боярышник ложно-разнолистный).

Сердцевинные лучи гетерогенные, однорядные и двурядные, а у боярышника ложноразнолистного отмечены редкие трехрядные лучи. Лучи довольно многочисленны: 60–90 штук на 1 мм<sup>2</sup> тангентального среза. Ширина их колеблется от 12–14 мкм у боярышника даурского до 55–57 мкм у боярышника алтайского. Самые высокие лучи имеет боярышник гиссарский – до 437 мкм, самая малая их высота отмечена у боярышника Арнольди – до 187 мкм. Слойность находится в пределах 12–80 клеток.

### Заклучение

Полученные данные о строении коры у однолетних стеблей *Crataegus altaica* (Loud.) Lange, *Crataegus dahurica* Koehne and Schneid., *Crataegus arnoldiana* Sarg., *Crataegus hissarica* Pojark., *Crataegus almaatensis* Pojark. и *Crataegus pseudoheterofylla* L. и *Crataegus oxyacantha* L. позволяют сделать вывод, что в качестве диагностических признаков можно рассматривать следующие признаки:

- 1) строение феллемы, а именно характер утолщения клеточных стенок и связанную с этим форму полостей ее клеток;
- 2) отсутствие волосков и слущивание кутикулы у эпидермы к концу первого года жизни стебля;
- 3) развитие колленхимы;
- 4) рыхлое сложение коровой паренхимы;
- 5) отсутствие феллодермы в составе перидермы.

Для видовой диагностики могут быть использованы тип механического кольца, форма кристаллов оксалата кальция и характер их размещения в его кристаллоносной обкладке.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лотова, Л. И. Современное состояние и перспективы развития анатомических исследований коры древесных растений в СССР / Л. И. Лотова // Науч. докл. высш. шк. Биол. науки. – 1985. – № 11. – С. 9–18.
2. Holdheide, W. Anatomie mitteleuropäischer Geholzirinden / W. Holdheide // Handbuch der Mikroskopie in der Technik. – Frankfurt am Main, 1951. – Vol. 2. – P. 193–367.
3. Roht, I. Structure patterns of tropical barcs / I. Roth // Handbuch der Pflanzenanatomie. – Berlin, 1981. – Vol. IX, Nr 3. – 609 p.
4. Малыченко, Е. В. Анатомия коры ив средней полосы Европейской части СССР : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Е. В. Малыченко. – М., 1986. – 22 с.
5. Бойко, В. И. Анатомическое строение коры видов семейства Ericaceae D. С. : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / В. И. Бойко. – Воронеж, 1996. – 26 с.
6. Еремин, В. М. Анатомия коры некоторых видов сем. Маслинных / В. М. Еремин / Брест. гос. ун-т. – Брест, 1996. – 15 с. – Деп. в ВИНТИ 21.02.1996, № 578–В96.
7. Ветлугина, Т. Г. Анатомия коры видов рода Fraxinus (Oleaceae) в связи с их положением в системе рода / Т. Г. Ветлугина, Л. И. Лотова // Ботан. журн. – 2000. – Т. 85, № 4. – С. 33–44.
8. Рой, Ю. Ф. Анатомическая структура однолетних стеблей и ее сезонная динамика : дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Ю. Ф. Рой. – Воронеж, 1998. – 226 л.



9. Lotova, L. I. Anatomy of cortex and secondary phloem of Rosaceae. 4. Roseae and ulmarieae (Rosoideae) / L. I. Lotova, A. C. Timonin // Ботан. журн. – 1999. – Т. 84, № 2. – С. 34–41.
10. Лотова, Л. И. Анатомия коры хвойных / Л. И. Лотова. – М. : Наука, 1987. – 150 с.
11. Еремин, В. М. Сравнительная анатомия коры сосновых : дис. ... д-ра биол. наук : 03.00.05 / В. М. Еремин. – Воронеж, 1983. – 630 л.
12. Матусевич, Н. М. Таксономический анализ древесных представителей семейства Rosaceae по признакам анатомической структуры коры их однолетних стеблей : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Н. М. Матусевич. – Минск, 2005. – 21 с.
13. Шкуратова, Н. В. Сравнительная анатомия коры представителей семейства Salicaceae Mirb. : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Н. В. Шкуратова. – Минск, 2005. – 21 с.
14. Прозина, М. Н. Ботаническая микротехника / М. Н. Прозина. – М. : Высш. шк., 1960. – 206 с.
15. Быкова, Н. Б. Сравнительно-анатомическое изучение структуры однолетних побегов некоторых видов Crataegus L. / Н. Б. Быкова, Фам Ван Нанг // Узб. ботан. журн. – 1976. – № 5. – С. 40–44.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 02.09.2020*



УДК 582.5/9 + 581.6

**Наталья Валерьевна Шкуратова**

канд. биол. наук, доц., зав. каф. ботаники и экологии  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Natalya Shkuratova**

PhD in Biological Sciences, Associate Professor,  
Head of the Department of Botany and Ecology  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: botany@brsu.brest.by

## ТАКСОНОМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ЯДОВИТЫХ РАСТЕНИЙ ФЛОРЫ БРЕСТСКОГО РАЙОНА

Приводятся данные о составе дикорастущих ядовитых растений Брестского района. Выявлено 39 видов ядовитых растений из 16 семейств покрытосеменных, в том числе 15 семейств двудольных и 1 семейства однодольных. Наибольшим количеством видов ядовитые растения представлены в составе семейств *Ranunculaceae* Juss., *Liliaceae* Juss., *Apiaceae* Lindl., *Solanaceae* Juss., *Papaveraceae* Juss., *Euphorbiaceae* Juss. Большинство видов имеют широкое распространение, встречаются по обочинам дорог, на железнодорожных насыпях, пустырях и в сорных местах.

### *Taxonomic Structure of Poisonous Plants in Flora of Brest Region*

The article presents data on the composition of wild poisonous plants in the Brest region. There are 39 species of poisonous plants from 16 families of angiosperms, including 15 families of dicotyledons and 1 family of monocotyledons. The largest number of poisonous plant species was found in the families *Ranunculaceae* Juss., *Liliaceae* Juss., *Apiaceae* Lindl., *Solanaceae* Juss., *Papaveraceae* Juss., *Euphorbiaceae* Juss. Most of the species are widespread, found on roadsides, railway embankments, vacant lots, and weeds.

### **Введение**

Ресурсная группа лекарственных растений в наше время имеет широкое применение. Более 130 видов белорусской флоры находят применение в медицине, причем по 70 видам ведутся организованные заготовки [1]. При этом не следует забывать, что ряд видов лекарственных растений содержит в своем составе алкалоиды, гликозиды, сапонины, органические кислоты или другие вещества, которые могут нанести вред здоровью человека. Эти виды принято называть ядовитыми растениями.

В Беларуси проводится учет лекарственных растений и их ресурсов [2]. Перечень портала «Растения Беларуси» содержит 22 вида ядовитых растений [3]. В Минской области зарегистрировано 36 видов ядовитых растений [4].

В Беларуси выделяют 10–14 наиболее опасных ядовитых растений, среди которых как широко распространенные дикорастущие виды, так и культивируемые растения, например, *Ricinus communis* L. [5].

Мониторинг флоры, в том числе состава тех или иных ресурсных групп, представляет собой один из этапов процесса сохранения биоразнообразия. Кроме того, данные по составу ядовитых растений необходимы при организации профилактических и образовательных мероприятий.

Целью данной работы является анализ таксономического состава ядовитых растений дикорастущей флоры, распространенных на территории Брестского района.



### Матэрыялы і метады

Руководствуясь данными о ядовитости того или иного вида [6–12], провели ревизию дикорастущей флоры покрытосеменных Брестского района. Материалом для исследования послужили собственные многолетние флористические наблюдения на территории Брестского района (фонд научного гербария Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина), а также данные белорусских исследователей [3; 13].

Систематическое положение растительных объектов указывается в соответствии с «Определителем высших растений Беларуси» под редакцией В. И. Парфенова [14].

Приводятся важнейшие отличительные морфологические признаки и типичные места обитания видов, основные группы ядовитых веществ и наиболее типичные признаки возможного воздействия на организм человека.

### Результаты и их обсуждение

Проведенный анализ показал произрастание 39 видов ядовитых растений на территории Брестского района (таблица).

Из состава семейств *Apiaceae* Lindl., *Ranunculaceae* Juss., *Solanaceae* Juss., *Papaveraceae* Juss., *Euphorbiaceae* Juss., *Liliaceae* Juss. сразу несколько видов травянистых растений являются ядовитыми.

Общепринято в семействе *Apiaceae* Lindl. считать ядовитыми *Conium maculatum* L. и *Cicuta virosa* L. *Conium maculatum* L. – агриофит, занимающий обочины дорог, сорные места, наиболее распространен в сельской местности. Этот двулетник отличает бороздчатый стебель с характерной красной пятнистостью. Растение целиком ядовито из-за содержания большого количества токсических алкалоидов (кониин, конгидрин, псевдоконгидрин), поэтому может вызывать отравления и контактные повреждения кожи и слизистых.

*Cicuta virosa* L. обитает на берегах рек, пойменных озер, канав. При растирании органы растения издадут неприятный запах, а вертикальное корневище на продольном разрезе имеет характерные поперечные перегородки, делящие его на отдельные камеры. Очень токсичное вещество цикутосин, присутствующее во всех его органах, крайне опасно для жизни человека.

Следует отметить, что *Cicuta virosa* L. изредка регистрируется на водоемах Брестского района, однако повсеместно в аналогичных условиях произрастает *Oenanthe aquatica* (L.) Poig., отличающийся округлыми очертаниями простых и сложных зонтиков. Это двулетнее растение также целиком является ядовитым. Высокая токсичность растения обусловлена содержанием ядовитых терпена фелландрена (в эфирном масле) и смолоподобного вещества энантоксина (энантина).

В Брестском районе получил распространение один из наиболее крупных видов травянистых растений умеренной зоны *Heracleum sibiricum* L., имеющий на территории Беларуси статус инвазионного вида [15]. Чаще всего *Heracleum sibiricum* L. встречается вдоль автодорог, являющихся основными путями его распространения. Опасность растение несет в трихомах на нижней поверхности листовой пластинки. Содержащиеся в трихомах фурукумарины обладают фотосенсибилизирующей активностью непродолжительный контакт кожи с названными веществами и последующим облучением солнечными лучами может привести к ожогам [16]

Общей чертой представителей семейства *Ranunculaceae* Juss. является содержание разнообразных алкалоидов и гликозиды сердечной группы. Отравление лютиками у людей встречаются преимущественно в результате приема внутрь средств народной



Таблица. – Таксономический список и характеристика ядовитых растений Брестского района

Семейство	Вид	Места обитания	Встречаемость	Компонент флоры
<i>Aristolochiaceae</i> Juss.	<i>Asarum europaeum</i> L.	лиственные, смешанные леса	редко	аборигенный
<i>Nymphaeaceae</i> Salisb.	<i>Nuphar lutea</i> (L.) Smith	в стоячих, медленно текущих водоемах	часто	аборигенный
<i>Ranunculaceae</i> Juss.	<i>Anemone nemorosa</i> L.	широколиственные, смешанные леса	часто	аборигенный
	<i>Anemone ranunculoides</i> L.	широколиственные, смешанные леса	редко	аборигенный
	<i>Caltha palustris</i> L.	берега мелиоративных каналов, рек, пойменных озер, заболоченные черноольшаники	часто	аборигенный
	<i>Thalictrum simplex</i> L.	пойменные луга, заросли кустарников, лесные опушки	редко	аборигенный
	<i>Consolida regalis</i> (L.) Schur	обочины дорог, ж/д насыпи, в посевах	часто	аборигенный
<i>Paraveraceae</i> Juss.	<i>Ranunculus flammula</i> L.	по берегам водоемов, сырым лугам	часто	аборигенный
	<i>Ranunculus sceleratus</i> L.	по берегам водоемов, сырым лугам	часто	аборигенный
	<i>Ranunculus acris</i> L.	обочины вдоль дорог, лугов	часто	аборигенный
	<i>Chelidonium majus</i> L.	леса, парки, сады, сорные места	очень часто	аборигенный
	<i>Paraver argemone</i> L.	обочины дорог, ж/д насыпей, в посевах	очень редко	адвентивный заносный
	<i>Paraver dubium</i> L.	обочины дорог, ж/д насыпей, в посевах	редко	адвентивный заносный
	<i>Paraver rhoeas</i> L.	сорные места	изредка	адвентивный заносный
<i>Brassicaceae</i> Burnett.	<i>Erysimum cheiranthoides</i> L.	обочины дорог, ж/д насыпей, на пустырях, в посевах	часто	адвентивный заносный
<i>Ericaceae</i> Juss.	<i>Ledum palustre</i> L.	заболоченные сосновые, смешанные леса	изредка	аборигенный
<i>Euphorbiaceae</i> Juss.	<i>Euphorbia cyparissias</i> L.	опушки сосняков, песчаные обочины дорог, пустыри	изредка	аборигенный
	<i>Euphorbia helioscopia</i> L.	обочины дорог, в посевах	изредка	адвентивный заносный
<i>Crassulaceae</i> DC.	<i>Euphorbia virgata</i> Waldst. et Kit.	суходольные луга, обочины дорог	часто	аборигенный
	<i>Sedum acre</i> L.	суходольные луга, песчаные пустоши	часто	аборигенный
<i>Araliaceae</i> Juss.	<i>Hedera helix</i> L.	влажные широколиственные и смешанные леса	очень редко	аборигенный



Окончание таблицы

<i>Ariaceae</i> Lindl.	<i>Cornium masculatum</i> L.	обочины дорог, сорные места, у жилья	часто	адвентивный заносный
	<i>Cicuta virosa</i> L.	берега рек, пойменных озер, канав	изредка	аборигенный
	<i>Oenanthe aquatica</i> (L.) Poir.	берега рек, пойменных озер, канав	часто	аборигенный
	<i>Heracleum sibiricum</i> L.	обочины дорог, пустыри	редко	адвентивный инвазионный
<i>Celastraceae</i> R. Br.	<i>Euonymus verrucosa</i> Scop.	сосновые, лиственные леса	редко	аборигенный
	<i>Viscum album</i> L.	урбанизированные территории, лесопосадки, лиственные, смешанные леса	очень часто	аборигенный
<i>Caprifoliaceae</i> Juss.	<i>Sambucus racemosa</i> L.	сосновые леса, на опушках	часто	адвентивный инвазионный
	<i>Sambucus nigra</i> L.	сосновые леса, на опушках	часто	адвентивный инвазионный
<i>Solanaceae</i> Juss.	<i>Datura stramonium</i> L.	обочины дорог, сорные места, у жилья	изредка	адвентивный заносный
	<i>Hyoscyamus niger</i> L.	обочины дорог, сорные места, у жилья	изредка	адвентивный заносный
	<i>Solanum dulcamara</i> L.	прибрежные заросли кустарников, берега рек, черноольшаники, ивняки	часто	аборигенный
	<i>Solanum nigrum</i> L.	обочины дорог, сорные места	изредка	адвентивный заносный
<i>Asteraceae</i> Dumort.	<i>Tanacetum vulgare</i> L.	обочины дорог, сорные места	часто	аборигенный
	<i>Convallaria majalis</i> L.	сосновые, смешанные леса	часто	аборигенный
<i>Liliaceae</i> Juss.	<i>Maianthemum bifolium</i> L.	сосновые, смешанные леса	часто	аборигенный
	<i>Polygonatum odoratum</i> (Mill.) Druce.	сосновые и смешанные леса	изредка	аборигенный
	<i>Polygonatum multiflorum</i> (L.) All.	смешанные и широколиственные леса	редко	аборигенный
	<i>Paris quadrifolia</i> L.	смешанные леса	редко	аборигенный



медицины на основе лютиков. Порядка 29 видов семейства встречаются на Полесье [13], из их числа широко распространены ядовитые лесные виды *Anemone nemorosa* L., *Anemone ranunculoides* L., луговые виды *Ranunculus flammula* L., *Ranunculus scelerantus* L., *Ranunculus acris* L., *Thalictrum simplex* L., прибрежный вид *Caltha palustris* L., придорожный – *Consolida regalis* (L.) Schur. У многолетников наибольшая концентрация ядовитых веществ накапливается в корневищах.

В семействе *Solanaceae* Juss. сочетаются съедобные, декоративно-ароматные, сорные растения, содержащие различные алкалоиды. Четыре вида дикорастущих ядовитых представителя семейства встречаются на территории Брестского района: *Datura stramonium* L., *Hyoscyamus niger* L. и *Solanum nigrum* L. – обитатели рудеральных территорий, *Solanum dulcamara* L. распространен в прибрежных зарослях, сырых черноольшаниках, ивняках.

У наиболее ядовитых видов *Datura stramonium* L. и *Hyoscyamus niger* L. содержатся алкалоиды, относящиеся к классу тропинов, которые в различной концентрации присутствуют во всех частях растения. Эти алкалоиды оказывают стимулирующее воздействие на центральную нервную систему и одновременно угнетают периферические нервы, обладают психотропным действием. *Datura stramonium* L. имеет голые стебли с крупно-зубчатыми листьями с заостренными вершинами, цветки с сильным дурманящим запахом, белым ворончато-складчатым венчиком и шипастый плод-коробочку. *Hyoscyamus niger* L. отличается клейким мягкоопушенным стеблем, грязно-белым колокольчатым венчиком с фиолетовой сетью жилок.

Два дикорастущих вида рода *Solanum* L. (*Solanum dulcamara* L. и *Solanum nigrum* L.) содержат во всех органах соланин, способный угнетать нервную систему, расстраивать органы пищеварительного тракта, разрушать эритроциты крови. *Solanum dulcamara* L. имеет лазающий стебель, цветок с лиловым венчиком, ярко-красные плоды. У *Solanum nigrum* L. стебель прямостоячий ветвистый, цветок с белым венчиком и черные плоды. Зрелые плоды указанных видов почти безвредны, поскольку содержание соланина по мере их созревания снижается так же, как и у хозяйственно значимых культивируемых видов – *Physalis alkekengi* L., *Capsicum annuum* L., *Lycopersicon esculentum* Mill.

В разной степени ядовитый млечный сок содержится у видов семейства *Papaveraceae* Juss. и *Euphorbiaceae* Juss.

В млечном соке представителей семейства *Papaveraceae* Juss. содержатся разнообразные алкалоиды – производные изохинолина, воздействующие на слизистые оболочки и нервную систему. На рудеральных местах, обочинах железнодорожных путей и автодорог, в посевах встречаются *Chelidonium majus* L., *Papaver rhoeas* L., *Papaver argemone* L., *Papaver dubium* L. При этом более широкое распространение получили первые два вида.

Многолетник *Chelidonium majus* L. отличается цветками в зонтиковидном соцветии, желтой окраской венчика, плодом в виде стручковидной коробочки и содержанием ярко-оранжевого млечного сока. Виды рода *Papaver* L. – однолетние травы с крупными одиночными цветками, лепестки которых окрашены в оттенки от фиолетового до красного, округлыми коробочками и белым млечным соком. Наиболее ядовитыми частями растений являются незрелые коробочки. Однако у распространенных в естественных местообитаниях видов *Papaver rhoeas* L., *Papaver argemone* L., *Papaver dubium* L. содержание алкалоидов более низкое и менее разнообразное в сравнении с культивируемым *Papaver somniferum* L.



Представители семейства *Euphorbiaceae* Juss. (однолетник *Euphorbia helioscopia* L., многолетники *Euphorbia cyparissias* L. и *Euphorbia virgata* Waldst. et Kit.) встречаются на лесных опушках, обочинах дорог, пустырях, сорных местах. Растения имеют несколько стеблей, покрытых очередными обратнойцевидными или линейно-ланцетными листьями, с невзрачными зеленовато-желтыми цветками, окруженными желтоватой оберткой, собранными в сложное зонтиковидное соцветие. Токсичный млечный сок сложного химического состава содержит эуфорбин, который оказывает раздражающее действие на слизистые глаз, желелудочно-кишечного тракта, вызывает фоточувствительные реакции кожи. Токсичность растения сохраняется высокой даже в высушенном растительном материале.

Выявленные 5 видов многолетних корневищных трав семейства *Liliaceae* Juss. распространены в лесных сообществах.

У четырех других представителей мелкие цветки с белым колокольчатым околоцветником собраны в характерные соцветия. У *Convallaria majalis* L. каждый узел корневища образует розетку из 2–3 крупных листьев и цветоносный стебель с верхушечной однобокой кистью. *Maianthemum bifolium* L. имеет стебель с двумя сердцевидными листьями, на верхушке которого располагается типичная кисть. У *Polygonatum odoratum* (Mill.) Druce и *Polygonatum multiflorum* (L.) All. на верхушке корневища закладывается стебель с многочисленными очередными, продолговато-овальными листьями, в пазухах которых располагаются по 2–5 цветков. Все части этих видов ядовиты, однако наибольшая концентрация ядовитых сердечных гликозидов обнаруживается в зрелых плодах – ярко-красных ягодах.

Пятый представитель – *Paris quadrifolia* L. – отличается мутовкой верхушечных листьев и единственным верхушечным цветком. Зрелый плод-ягода имеет интенсивную синевато-черную окраску. Все органы растения крайне ядовиты, поскольку содержит парастифин и парадин, оказывающий нейротоксическое действие.

Семейства *Asteraceae* Dumort., *Aristolochiaceae* Juss., *Brassicaceae* Burnett., *Nymphaeaceae* Salisb., *Crassulaceae* DC., *Ericaceae* Juss., *Araliaceae* Juss. представлены единичными ядовитыми видами на территории Брестского района.

На опушках, полянах, вдоль дорожных обочин, на урбанизированных территориях распространен вид *Tanacetum vulgare* L. (семейство *Asteraceae* Dumort.). Корневищный многолетник выделяется щитковидными соцветиями из плоских ярко-желтых корзинок. Все растение ядовито, особенно соцветия: препараты *Tanacetum vulgare* L. повышают артериальное давление, замедляют ритм сердца, увеличивают амплитуду сердечных сокращений, усиливают желчеотделение и секрецию желудочно-кишечного тракта.

*Asarum europaeum* L. (*Aristolochiaceae* Juss.) на корневище образует блестящие темно-зеленые листья копытообразной формы, способные перезимовывать под покровом листового опада в дубравах и смешанных лесах. Органы растения содержат алкалоид азарин и аристолохиевую кислоту. Последняя является сильным канцерогеном с отложенным до десяти лет сроком действия.

Часто как сорное растение в полях, на огородах, в населенных пунктах вдоль дорог, на пустырях встречается *Erysimum cheiranthoides* L. (*Brassicaceae* Burnett.). Это ветвистый однолетник с очередными, продолговато-ланцетными листьями, верхушечными кистями с мелкими ярко-желтыми цветками и цилиндрическими стручками, направленными косо вверх. Ядовитые свойства вида обусловлены присутствием сердечных гликозидов, наибольшая концентрация которых наблюдается в генеративных



органах. При легкой форме отравления им учащается сердцебиение, в тяжелых случаях начинается тошнота, рвота, синюшность кожи и слизистых, одышка.

В стоячих, медленно текущих водоемах Брестского района широко распространены гидатофит *Nuphar lutea* (L.) Smith (*Nymphaeaceae* Salisb.). Особенностью растения являются плавающие на поверхности воды длинночерешковые, кожистые, овальные листья с глубокосерцевидным основанием и цветок с желтой пятичленной чашечкой. *Nuphar lutea* (L.) Smith содержит алкалоиды нуфаридины и тиобинуфаридины, вызывающие нарушения со стороны желудочно-кишечного тракта.

На открытых песчаных местах распространен листовая суккулент *Sedum acre* L. (*Crassulaceae* DC.). Вязкий клеточный сок листьев *Sedum acre* L. имеет острый привкус и содержит в несколько десятков раз больше алкалоидов, чем у других дикорастущих близкородственных видов рода *Sedum* L. Употребление растения может вызвать рвоту, спазмы желудка, диарею, нарушения в работе сердечно-сосудистой системы, затруднение дыхания. Свежий сок растения может провоцировать местное раздражение, ожоги и волдыри на коже.

Однако ядовитые растения представлены не только травянистыми биоморфами. На территории Брестского района зарегистрированы 7 видов с древесной биоморфой из состава семейств *Caprifoliaceae* Juss., *Celastraceae* R. Br., *Lorantaceae* Juss., *Ericaceae* Juss.

Два инвазионных вида кустарников семейства *Caprifoliaceae* Juss. растут в тенистых местах, встречаются под пологом соснового леса, на опушках. *Sambucus racemosa* L. отличается неприятным запахом всех органов и ярко-красными плодами. У *Sambucus nigra* L. побеги не имеют запаха, а ягоды темные, почти черные. Оба вида содержат ядовитый самбунигрин и вещество амигдалин, которое способно трансформироваться в синильную кислоту, вызывающую клеточное кислородное голодание и, как следствие, остановку сердца. У *Sambucus racemosa* L. ядовиты все части растения, а у *Sambucus nigra* L. безопасны зрелые ягоды.

Кустарник *Euonymus verucosa* Scop. (*Celastraceae* R. Br.) предпочитает тенистые местообитания в подлеске сосновых и лиственных лесов. В органах растения содержится гликозид эвонимин. Отравления обычно вызывают яркие плоды, которые могут вызвать рвоту, головокружение, слабость, диарею, а в тяжелых случаях – озноб, судороги, нарушение функции сердца.

*Viscum album* L. (*Lorantaceae* Juss.) – вечнозеленый кустарник-полупаразит, поселяющийся на лиственных породах. Это растение с дихотомическим ветвлением и кожистыми супротивными листьями можно встретить на деревьях в любом населенном пункте. Сапонины и алкалоиды придают растению ядовитые качества: вызывают тошноту, рвоту, диарею.

В заболоченных сосновых и смешанных лесах произрастает реликт ледникового периода *Ledum palustre* L. (*Ericaceae* Juss.) – прямостоячий вечнозеленый кустарник с рыжим войлочным опушением побегов и плотными, зимующими листьями. Все наземные части растения ядовиты. В химическом составе идентифицировано 47 соединений эфирных масел, преобладающими среди которых являются сесквитерпеновые спирты: палюстрол, ледол и др., – дающие резкий запах. На отделы центральной нервной системы летучие вещества *Ledum palustre* L. действуют возбуждающе, могут вызывать у человека сильнейшую головную боль.

Редкая реликтовая древовидная лиана с воздушными корнями-присосками *Hedera helix* L. (*Araliaceae* Juss.) также является ядовитым растением. В природных условиях



вид регистрируется лишь в отдельных точках Брестского района [13; 17]. Наибольшей токсичностью обладают плоды *Hedera helix* L., они могут вызвать сильное отравление.

### Заклучение

В ходе проведенного анализа дикорастущей флоры Брестского района выявлено 39 видов ядовитых растений из 16 семейств покрытосеменных, в т. ч. из 15 семейств двудольных и 1 семейства однодольных. Наибольшее количество видов ядовитых растений выявлено в составе семейств *Ranunculaceae* Juss., *Liliaceae* Juss., *Apiaceae* Lindl., *Solanaceae* Juss., *Paraveraceae* Juss., *Euphorbiaceae* Juss. 82 % от общего числа выявленных видов являются однолетними или многолетними травами. Преобладают аборигенные виды (69 % от общего числа выявленных видов). 12 видов относятся к адентивным, из них заносных – 9 видов, инвазионных – 3 вида (*Heracleum sibiricum* L., *Sambucus racemosa* L., *Sambucus nigra* L.). Большинство видов имеют широкое распространение и встречаются по обочинам дорог, на железнодорожных насыпях, пустырях и сорных местах. В составе аборигенной фракции также выявлены ядовитые растения лесных мест обитания (*Asarum europaeum* L., *Ledum palustre* L., *Anemone nemorosa* L., *Anemone ranunculoides* L., *Convallaria majalis* L., *Maianthemum bifolium* L., *Polygonatum odoratum* (Mill.) Druce., *Polygonatum multiflorum* (L.) All., *Paris quadrifolia* L. и др.) и водно-прибрежных мест обитания (*Nuphar lutea* (L.) Smith, *Caltha palustris* L., *Conium maculatum* L., *Cicuta virosa* L.). *Hedera helix* L. является редким охраняемым видом.

Таким образом, категория «ядовитые растения» охватывает растительные организмы, принадлежащие к различным таксономическим группам, жизненным формам, с различным соэкологическим статусом, распространенные в различных природных фитоценозах, сеgetальных и рудеральных сообществах, в составе аборигенной и адвентивной фракций флоры.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бученков, И. Э. Растительные ресурсы Беларуси, рациональное использование и охрана / И. Э. Бученков. – Минск : МГЭУ им. А. Д. Сахарова, 2013. – 108 с.
2. Государственный кадастр растительного мира Республики Беларусь. Основы кадастра. Первичное обследование 2002–2017 гг. / О. М. Масловский [и др.]. – Минск : Беларус. навука, 2019. – 599 с.
3. Растения Беларуси [Электронный ресурс] // Информационно-поисковая система Центрального ботанического сада Национальной академии наук Беларуси. – Режим доступа: <http://hbc.bas-net.by/plantae>.
4. Ядовитые растения [Электронный ресурс] // Agro Belarus. – Режим доступа: [https://agrobeltarus.by/news/belarus/yadovitye\\_rasteniya\\_36\\_smertelnykh\\_vragov\\_pod\\_nogami/](https://agrobeltarus.by/news/belarus/yadovitye_rasteniya_36_smertelnykh_vragov_pod_nogami/).
5. Топ растений, особо опасных для белорусов при «близком знакомстве» [Электронный ресурс] // Интерфакс-запад. Природа. – Режим доступа: <https://interfax.by/news/obshchestvo/priroda/1275930/>.
6. Шамрук, С. Г. Лекарственные растения: сбор, заготовка, применение / С. Г. Шамрук. – Минск : Ураджай, 1988. – 287 с.
7. Лекарственные растения / В. И. Попов, Д. К. Шапиро, И. К. Данусевич. – Минск : Полымя, 1990. – 304 с.
8. Кьосев, П. А. Полный справочник лекарственных растений / П. А. Кьосев. – М. : ЭКСМО, 2005. – 992 с.



9. Сафонов, Н. Н. Полный атлас лекарственных растений / Н. Н. Сафонов. – М. : ЭКСМО, 2007. – 310 с.
10. Лекарственные растения в медицине (травник) [Электронный ресурс] // Травник : онлайн-журнал. – Режим доступа: <https://good-tips.pro/index.php/medicinal-plants>.
11. Лекарственные растения и их применение [Электронный ресурс] // Кладовая леса. – Режим доступа: <https://www.kladovayalesa.ru/archives/2034>.
12. Энциклопедия лекарственных растений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://lektrava.ru/encyclopedia/>.
13. Третьяков, Д. И. Флора сосудистых растений биосферного резервата «Прибужское Полесье» / Д. И. Третьяков, С. С. Савчук // Фиторазнообразие Восточной Европы. – 2011. – № 9. – С. 83–130.
14. Определитель высших растений Беларуси / под ред. В. И. Парфенова. – Минск : Дизайн ПРО, 1999. – 472 с.
15. Растения-агрессоры. Инвазионные виды на территории Беларуси / Д. В. Дубовик [и др.]. – Минск : Беларус. Энцыкл. імя П. Броўкі, 2017. – 190 с.
16. Ламан, Н. А. Гигантские борщевики – опасные инвазивные виды для природных комплексов и населения Беларуси / Н. А. Ламан, В. Н. Прохоров, О. М. Масловский / Ин-т эксперим. ботаники им. В. Ф. Купревича НАН Беларуси. – Минск, 2009. – 40 с.
17. Красная книга Республики Беларусь. Растения: редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды дикорастущих растений / редкол.: И. М. Качановский (пред.) [и др.]. – 4-е изд. – Минск : Беларус. Энцыкл. імя П. Броўкі, 2015. – 448 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 02.09.2020*



УДК 615.83(476)

**Альберт Александрович Богдасаров<sup>1</sup>, Максим Альбертович Богдасаров<sup>2</sup>,  
Оксана Ивановна Грядунова<sup>3</sup>, Сергей Степанович Житинец<sup>4</sup>,  
Наталья Леонтьевна Строганова<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>канд. геол.-минерал. наук, проф.,

действительный член Белорусского географического общества

<sup>2</sup>д-р геол.-минерал. наук, проф., член-корр. НАН Беларуси,

зав. каф. географии и природопользования

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>3</sup>канд. геогр. наук, доц., доц. каф. географии и природопользования

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>4</sup>директор санаторно-курортной организации «Брестагроздравница»

<sup>5</sup>зам. директора по медицинской части

санаторно-курортной организации «Брестагроздравница»

**Albert Bogdasarov<sup>1</sup>, Maxim Bogdasarov<sup>2</sup>, Oxana Gryadunova<sup>3</sup>,  
Sergey Zhitinets<sup>4</sup>, Natalya Stroganova<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>PhD in Geological and Mineralogical Sciences, Professor,

Full Member of the Belarusian Geographical Society

<sup>2</sup>Doctor of Geological and Mineralogical Sciences, Professor,

Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus,

Head of the Department of Geography and Environmental Management

of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>3</sup>PhD in Geographical Sciences, Associate Professor,

Associate Professor of the Department of Geography and Environmental Management

of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>4</sup>Director of the Sanatorium-Resort Organization «Brestagrozdavnitsa»

<sup>5</sup>Deputy Director for Medical Affairs

of the Sanatorium-Resort Organization «Brestagrozdavnitsa»

e-mail: <sup>1,2</sup>bogdasarov73@mail.ru, <sup>3</sup>gryadunova@mail.ru, <sup>4,5</sup>berestie@brest.by

## **ПРИРОДНЫЕ ЛЕЧЕБНЫЕ ФАКТОРЫ САНАТОРНО-КУРОРТНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ «БРЕСТАГРОЗДРАВНИЦА»**

Дана характеристика природных лечебных факторов территории санаторно-курортной организации «Брестагроздравница». С учетом стратиграфических и литологических особенностей разреза месторождения выделены и описаны крупные водоносные системы. Раскрыт курортологический потенциал минеральных вод, рельефа, климата, лечебных грязей для лечения заболеваний сердечно-сосудистой системы, центральной и периферической нервной системы, хронических заболеваний желудочно-кишечного тракта, заболеваний опорно-двигательного аппарата, кожи, мочеполовой системы и обмена веществ.

### ***Natural Healing Factors of the Sanatorium-Resort Organization «Brestagrozdavnitsa»***

The paper describes the characteristics of the natural healing factors of the territory of the sanatorium-resort organization «Brestagrozdavnitsa». Taking into account the stratigraphic and lithological features of the field section, large aquifers are identified and described. The balneological potential of mineral waters, relief, climate, therapeutic mud for the treatment of diseases of the cardiovascular system, central and peripheral nervous system, chronic diseases of the gastrointestinal tract, diseases of the musculoskeletal system, skin, genitourinary system and metabolism has been revealed.



### **Введение**

Проблема восстановительного лечения в санаторно-курортных учреждениях весьма актуальна в связи с тем, что здоровье населения Беларуси является сегодня фактором национальной безопасности. Проект концепции государственной политики развития курортного дела в Беларуси предусматривает создание комплексных программ оздоровления и медицинской реабилитации с использованием основных лечебных факторов курортов: минеральных вод, климата, лечебных грязей для обеспечения высокопрофессионального санаторно-курортного лечения.

Цель данной работы – определение курортологического потенциала природных лечебных факторов территории ОАО санаторно-курортной организации «Брестагроздравица» (далее – санаторий «Берестье»).

### **Материалы и методы исследования**

Информационную базу исследования составили данные описания скважин, пробуренных в пределах территории санатория «Берестье» в разное время специалистами РУП «Белгеология». В связи с этим получена информация о вещественном составе водоносных отложений и их принадлежности к определенным стратиграфическим подразделениям. Авторами также использовались литературные источники и серии опубликованных карт (топографические, тектонические, геологические, дочетвертичных отложений, климатические, ландшафтные и др.).

### **Результаты и их обсуждение**

Санаторий «Берестье» (с 2003 г. – ОАО санаторно-курортная организация «Брестагроздравица») основан в 1976 г. и является одним из наиболее известных санаторно-курортных учреждений Республики Беларусь. Санаторий расположен в 40 км от Бреста в поселке Берестье. Это малонарушенные природные территории Республиканского ландшафтного заказника «Прибужское Полесье» на берегу Рогознянского озера.

Район расположения санатория «Берестье» приурочен к территории Подляско-Брестской впадины. Геологическими границами на юге являются широтно расположенные разломы. В геологическом строении данного района принимают участие горные породы кристаллического фундамента архейского, нижне-средне-протерозойского возраста и отложения горных пород осадочного чехла верхнего протерозоя, мезозоя и кайнозоя общей мощностью от 400 до 600 м.

Длительный этап формирования впадины и граничащих с ней структур, блоковая тектоника фундамента обусловили и не менее сложное геологическое строение. Разрывными тектоническими нарушениями отложения осадочного чехла до силура включительно расчленены на блоки с разной амплитудой перемещения. Перекрывающие их отложения юры и вышележащие образования плавно погружаются в западном направлении и разломами не затронуты.

С учетом стратиграфических и литологических особенностей разреза месторождения выделяются следующие крупные водоносные системы: верхняя из них – мезозой-кайнозойская – включает водоносные горизонты и комплексы четвертичных, неогеновых, палеогеновых, меловых и юрских отложений. Это зона активного водообмена, и здесь циркулируют пресные и ультрапресные воды гидрокарбонатного кальциево-натриевого типа.

Подстилающая юрские отложения вулканогенно-осадочная толща берестовецкого горизонта венда, слабопроницаемая, с прослоями водоупорных базальтов отделяет



верхнюю систему от нижней, куда входят верхнепроторозойские водоносные породы и трещиноватая зона кристаллического фундамента. Это зона замедленного обмена, где циркулируют минерализованные хлоридные натриевые воды (рисунок 1).

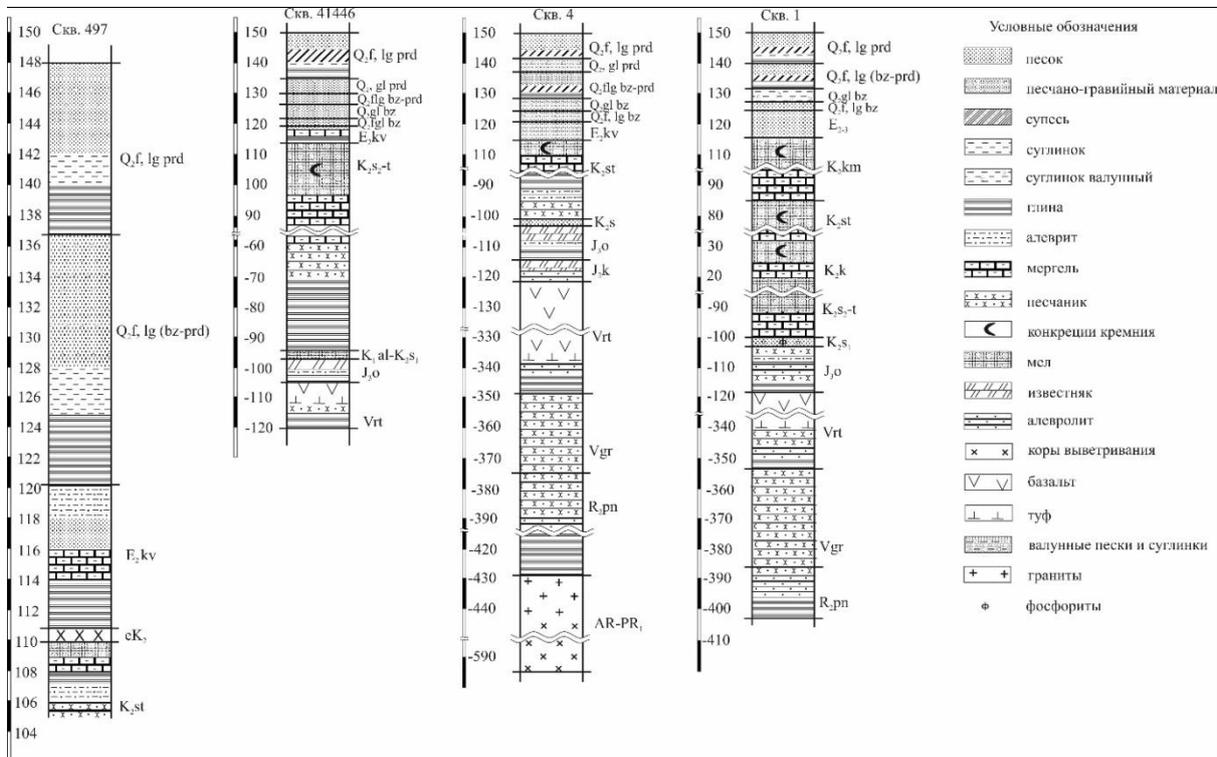
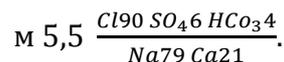


Рисунок 1. – Литолого-стратиграфические колонки (район санатория «Берестье»)

Таким образом, гидрохимический разрез представлен здесь двумя гидрохимическими зонами. Переход от одной к другой в пределах местонахождения осуществляется не постепенно, а скачкообразно, в результате чего определенную трудность представляет получение маломинерализованных вод.

На самом участке санатория были пробурены четыре скважины и были выведены минеральные воды двух типов:

1. **Воды средней минерализации** (4,9–5,5 г/л) хлоридные кальциево-натриевые, выведены из вулканогенно-осадочных горных пород берестовецкого горизонта волынской серии венда скважиной № 2 из интервала 288–450 м. Воды данных отложений соответствуют водам средней минерализации, холодные – с температурой на изливе 9–14 °С, слабощелочные – рН 7,48. Формула солевого состава воды скважины № 2 [5]:



В анионном составе преобладает хлор (89,9 экв. %), сульфаты (6,5 экв. %), гидрокарбонатов почти в два раза меньше – 3,4 экв. %. В катионном составе наибольшее значение имеют ионы натрия (78,6 экв. %), кальция (21 экв. %), содержание магния незначительное – 0,21 экв. %.

Из специфических бальнеологических компонентов содержится бром (14,2 мг/л, что ниже бальнеологической нормы), также содержатся следующие микроэлементы:



стронций (2,8 г/л), литий (0,09 мг/л), калий (15 мг/л), в очень незначительных количествах никель и свинец. Из недиссоциированных молекул: кремниевая и борная кислоты (11,8 и 10,7 г/л соответственно); содержание радиоактивных элементов соответствует фоновым концентрациям. По составу растворенного газа – воды азотные с содержанием азота, кислорода и углекислого газа (88,3, 1,2 и 9,9 % соответственно).

Вода из скважины № 2 прозрачная, бесцветная, без запаха и без осадка. По своим показателям она аналогична минеральным лечебно-столовым водам «Миргородская» (Украина), «Друскининкай» (Литва), «Минская» (Беларусь) и «Острожская» (Украина). Согласно бальнеологическому заключению данная вода может использоваться при лечении хронических гастритов с секреторной недостаточностью и хронических колитов. В соответствии с рекомендациями врачей воду набирают в бювете для питья – холодную или подогретую.

**2. Воды высокой минерализации** (17,8–19,2 г/л), бромные, хлоридные, натриевые, выведенные скважинами № 1, 3 и 4 из водоносного комплекса отложений горбашевского горизонта волынской серии и пинской свиты рифея с глубин соответственно 490–552, 300–505 и 505–741 м. Вода высокоминерализованная, бесцветная, без запаха, прозрачная, солёноватая на вкус, холодная (температура на изливе 9–14 °С), реакция среды от нейтральной до слабощелочной – рН 6,9–7,5, бромная (содержание брома – 49,5–55,0 мг/л). В анионном составе вод преобладает хлор (96,7 экв. %), сульфаты (2,9–3,0 экв. %), гидрокарбонаты (0,14–0,7 экв. %). В катионном составе преобладает натрий (79,2–79,6 экв. %), кальций (18,1–18,4 экв. %), магний (1,3–2,4 экв. %).

Из микроэлементов в воде присутствуют литий, калий, стронций, железо (0,26, 36,9–79,0, 7,0, до 0,07 мг/л соответственно), в виде следов присутствуют медь и марганец. Из недиссоциированных молекул в водах обнаружены кремниевая и борная кислоты (25,0–26,1 и 25,0–26,1 мг/л соответственно); в небольших количествах содержится радон (от 4,5 до 32,5 эман), что не позволяет отнести эти воды даже к очень слабо радонным. Содержание токсичных, радиоактивных и вредных компонентов не превышает предельно допустимых концентраций.

В санитарно-бактериологическом отношении воды чистые, по составу растворенного газа – азотные и по своим показателям аналогичны минеральным лечебным водам санаториев «Старая Русса» (Россия), «Чартак» (Узбекистан), «Друскининкай» (Литва), «Сурутис» (Латвия), «Нарочь» (Беларусь), «Ак-Каны» (Казахстан) и «Серегово» (Россия). Формула солевого состава воды скважины № 1 [5]:

$$M 17,8 \frac{Cl_{97} SO_4 3}{Na_{80} Ca_{18} Mg_2}$$

В целом воды скважин № 1, 3 и 4 по своему химическому составу и соотношению ионов относятся к хлоридным натриевым бромным водам высокой минерализации с повышенным содержанием кальция и кислой (рН до 7,5) по реакции среде, а потому они с успехом используются в лечении и оздоровлении.

В настоящее время минеральную воду выводят на поверхность четыре скважины (№ 1–3, которые эксплуатируются, и резервная скважина № 4). Общие запасы разведанной минеральной воды во много раз превышают водопотребление, и в планах санатория выпуск бутилированной минеральной воды различных концентраций.

Основываясь на результатах анализов эффективности наружного применения минеральных вод аналогичного состава, опыта работы белорусских здравниц с хлоридно-натриевыми, бромными минеральными водами и имеющимися рекомендациями в меди-



цинской літаратуры, мінеральная вода из скважин № 1, 3 и 4 санатория «Берестье» может применяться для лечения заболеваний сердечно-сосудистой системы, центральной и периферической нервной системы, хронических заболеваний желудочно-кишечного тракта, заболеваниях опорно-двигательного аппарата, кожи, мочеполовой системы и обмена веществ.

Минеральную воду санатория используют с лечебно-профилактическими целями для наружного применения в виде различных душей и ванн, купания в бассейне, вытяжения позвоночника и в других бальнеотерапевтических процедурах. Процедуры наружного применения минеральных вод способствуют ускорению акклиматизации и адаптации к условиям внешней среды, мобилизации защитных механизмов, восстановлению функций организма, нарушенных различными заболеваниями.

Минеральные воды, используемые наружно, обладают и специфическим влиянием на организм, что обусловлено их химическим составом и физико-химическими особенностями. Проникновение минеральных веществ и газов из воды через кожу в кровь незначительно. Даже если эти вещества и обнаруживаются в крови, то их количество ничтожно мало для оказания сколько-нибудь значимого фармакологического действия. При этом минеральные воды действуют на организм человека совокупностью своих свойств, а не отдельными показателями: химическим и газовым составом, температурой, гидростатическим и механическим воздействиями, продолжительностью самой процедуры, плотностью воды и т. д.

Химическое воздействие определяется наличием в минеральной воде макро- и микроэлементов, органических веществ и газов. В действии водно-терапевтических процедур большое значение имеют также исходное функциональное состояние организма и его нервной системы, наличие сопутствующих заболеваний и общей реакции на водолечение. При разведении водопроводной водой (в 2–5 раз) минеральная вода из скважин № 1, 3 и 4 может использоваться для внутреннего применения, а взятая в бювете высоко-минерализованная вода может использоваться для полоскания горла и различного рода примочек и орошений.

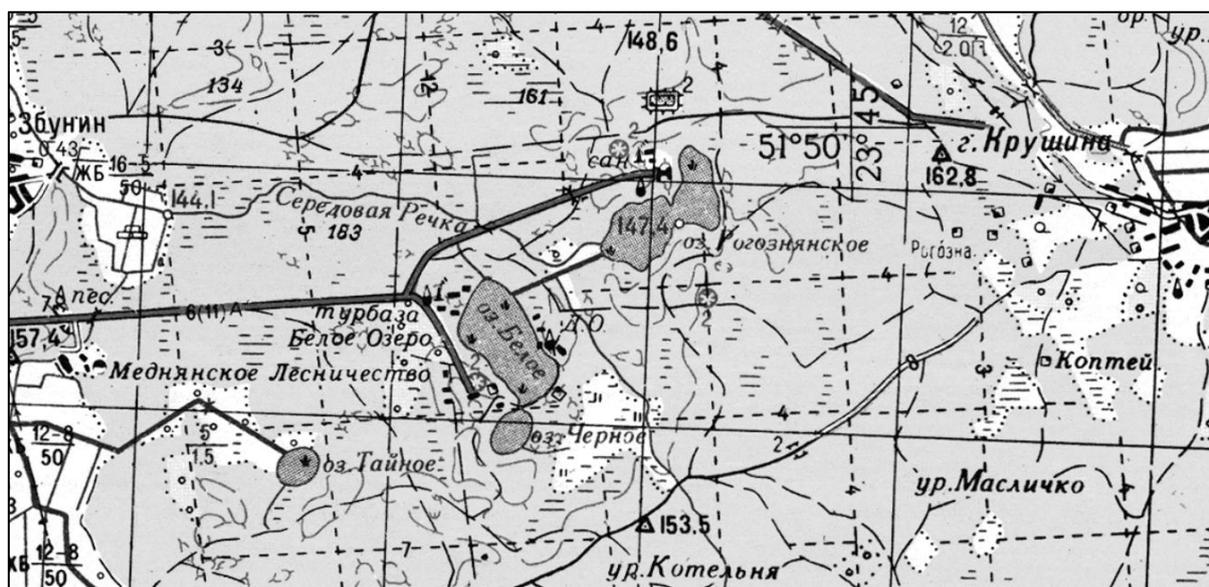


Рисунок 2. – Рельеф территории (район санатория «Берестье»)



Для *лечебно-оздоровительного отдыха* как функционально, так и эстетически наиболее благоприятна пересеченная местность, но с незначительными возвышениями. Поэтому лечебно-оздоровительные учреждения располагаются, как правило, либо на равнинных территориях, либо в предгорной (200–400 м) и в низкогорной (400–1 000 м) частях [4]. В районе санатория средняя высота – 150 м над уровнем моря (самая высокая точка – гора Крушина – 162,8 м, самая низкая – урез воды р. Середовая Речка – 144,1 м) (рисунок 2).

Окрестности санатория представлены плоско-волнистой водно-ледниковой равниной с дюнами, песчаными грядами, холмами, лощинами и котловинами разных размеров. Для оздоровительных целей наиболее благоприятен крупнохолмистый или грядовой рельеф; относительно благоприятна – слабохолмистая и волнистая местность; ровная, плоская поверхность неблагоприятна, так как с точки зрения эстетики пейзажного восприятия монотонный рельеф неинтересен, а также функционально малоприспособлен [4]. Равнинный участок дренируется Середовой Речкой. Долина реки выражена слабо и относится к долинам пойменного типа. Водораздельные участки долин данных рек образованы эоловыми формами рельефа в виде линейно-вытянутых песчаных гряд высотой 158,0–165,0 м, с относительной высотой над окружающей местностью 5,0–8,0 м. Среди разнообразных эоловых форм в западинах расположены небольшие по площади заторфованные озерные котловины и котловины современных озер карстового генезиса (Белое, Черное, Рогознянское и др.) [2].

Грязелечение (пелоидотерапия) – один из методов теплового лечения, при котором лечебный эффект достигается благодаря использованию лечебных грязей различных типов. На территории Беларуси имеются условия для формирования сапропелевых и торфяных грязей. В целом сапропелевые грязи обладают ярко выраженным противовоспалительным, рассасывающим, десенсибилизирующим, болеутоляющим и трофико-регенерирующим действием. Они вызывают активизацию нейроэндокринной системы, нормализацию реактивности организма человека и способствуют его выздоровлению.

Основные запасы сапропелей (более 80 %) сосредоточены в Витебской и Минской областях, чуть более 15 % находится в Гомельской и Брестской областях, около 2–2,5 % – в Могилевской и Гродненской областях. В санаториях Беларуси используются следующие грязи:

- 1) сапропелевые лечебные грязи оз. Дикое Дятловского р-на Гродненской области (пресноводные, рН = 7,4);
- 2) сапропелевые лечебные грязи оз. Плисса Глубокского р-на Витебской области (пресноводные, рН = 7,5);
- 3) сапропелевые лечебные грязи оз. Судобль Смолевичского р-на Минской области (пресноводные, рН = 6,8–7,4);
- 4) сапропелевые лечебные грязи озера Святое Рогачевского р-на Гомельской области (пресноводные, рН = 5,8);
- 5) торфяные, сапропелевые лечебные грязи оз. Кирово Жлобинского р-на Гомельской области;
- 6) сульфидные иловые грязи оз. Саки Крымского полуострова;
- 7) хлор-магний-кальциевые сульфидные иловые лечебные грязи Мертвого моря.

Наиболее изученными и востребованными являются сапропели оз. Дикое Гродненской области, где работает грязевой добычной комплекс и цех по производству сапропелевых аппликаций.



Учеными Беларуси были исследованы возможности использования в грязелечении сапропелей из разных белорусских озер: Судобль, Мотыль, Олтуш, Ант-озеро, Тайное (рисунок 2). В настоящее время в грязелечебницах республики более 90 % грязевых процедур обеспечивается сапропелями местных озер. И это объясняется тем, что по своим физико-химическим составляющим и лечебным свойствам белорусские сапропели близки к сапропелям оз. Молтаево Свердловской области (курорт «Самоцвет»), оз. Боляш Челябинской области (курорт «Кисегач»), оз. Увильды на Урале, оз. Талая Магаданской области (Россия), оз. Кемери в Латвии и др. Наш сапропель богат макро- и микроэлементами (кальцием, магнием, кремнием, фосфором, азотом, углеродом, марганцем, железом, медью, цинком, свинцом, ванадием, кобальтом, никелем, бором, серой, бромом, йодом и др.), в нем много свободных и связанных аминокислот, витаминов, ферментов и других биологически активных веществ, которые в совокупности оказывают эффективное лечебное воздействие на организм человека.

Одним из перспективных объектов – источников сапропелевых грязей – является оз. Тайное Брестского р-на Брестской области, детально разведанное еще в 1988 г. Оно расположено в 4 км к северо-западу от санатория «Берестье» и относится к бассейну р. Зап. Буг. Препятствий для организации здесь добычного участка сапропелей нет, а общность свойств и особенностей с сапропелями оз. Дикое Гродненской области позволит использовать их в качестве лечебного компонента и в сельском хозяйстве в качестве органического удобрения.

Суммарные запасы лечебного сырья оз. Тайное по оценочной балансовой категории «А» составляют порядка 420 тыс. м<sup>3</sup>. Из них 46 тыс. м<sup>3</sup> – органические сапропели и 374 тыс. м<sup>3</sup> – кремнеземистые бессульфидные среднезольные. Все отложения представлены сапропелями темно-коричневого цвета от разжиженного сверху до пластичного внизу разрезов состояния, практически чистые, незасоренные. Максимальная мощность – 9,6 м при средней расчетной – 5,45 м.

Содержание основных компонентов (%): Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – 4,1–13,8; CaO – 30,9–36,6; P<sub>2</sub>O<sub>5</sub> – 0,43–1,80; KCl – 4,8–7,16; SiO<sub>2</sub> – 20,1–23,8; Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – 3,01–3,85; SO<sub>3</sub> – 2,20–2,85; MgO – 0,59–1,77; Na<sub>2</sub>O – 0,44–0,69; K<sub>2</sub>O – 0,48–0,72; N<sub>общ.</sub> – 2,78–6,63. Влажность на глубинах до 4,5–5,0 м – до 91–92 %, а до глубин 9,0–9,5 м – до 87–89 % [1; 2].

С целью приемки объекта к добычным работам и использования сапропелей в лечебных и народно-хозяйственных процессах были произведены специальные радиологические исследования внешнего гамма-излучения. Пробы грунта береговой линии (песок с сапропелем) исследовались на содержание объемной и удельной активности гамма-излучающих радионуклидов <sup>137</sup>Cs и <sup>40</sup>K, а также <sup>90</sup>Sz на гамма-бета-спектрометре типа МКС-АТ1315 показали значения в пределах 2,18+/-0,44 Бк/кг, т. е. являются практически чистыми и могут быть использованы в дальнейшей работе.

Вещественный состав, элементы-примеси и радиоактивная составляющая сапропелей оз. Тайное идентичны сапропелям оз. Дикое. Осадки этих озер ледникового происхождения характеризуются одинаковыми условиями осадконакопления и однотипными осадками: сапропель, торф, карбонатный и органический ил, глина, песок, поэтому их лечебный и хозяйственный эффект должен быть также одинаковым. Лечебные грязи раздражают многочисленные рецепторы, оказывают нервно-рефлекторное и нейрогуморальное влияние на течение физиологических процессов, а в основе механизма действия грязей лежит термический, химический и механический эффекты.

Для оздоровления в санаторно-курортных учреждениях широко используется климатолечение, поэтому необходимо провести оценку биоклимата территории санато-



рия «Берестье». Климат данной территории умеренно-континентальный. Ультрафиолетовое излучение в небольших дозах полезно для людей и крайне необходимо для выработки витамина D.

Территория санатория «Берестье» попадает в оптимальную зону медико-климатического ультрафиолетового режима (47–57° с. ш.), которая характеризуется комфортным ультрафиолетовым режимом в течение всего года. Высота солнца над горизонтом 22 июня составляет 61° 20', что обуславливает его сильную биологическую активность. В декабре солнце над горизонтом поднимается не выше 14° 26', поэтому ультрафиолет не достигает земной поверхности. Согласно медико-климатической характеристике ультрафиолетового режима и степени комфортности мы испытываем зимний дискомфорт от ультрафиолетового дефицита (таблица 1) [4].

Таблица 1. – Биологическая активность Солнца

Высота солнца над горизонтом в полдень, °	Характеристика биологической активности Солнца
<25	Ультрафиолет не достигает земной поверхности (УФ дефицит)
25–45	Умеренная биологическая активность солнца
45–60	Сильная биологическая активность солнца
>60	Чрезмерная биологическая активность солнца

Световой (инсоляционный) режим определяется продолжительностью солнечного сияния, в течение которого возможно проведение различных рекреационных занятий. Недостаток продолжительности солнечного сияния, отмечающийся в северных широтах, является дискомфортным явлением. В районе санатория «Берестье» раздражающее воздействие на организм может оказывать недостаточная продолжительность солнечного сияния в июле (только 269 ч.) (таблица 2), но и эта величина изменяется от года к году. Тренирующим воздействием характеризуется количество часов солнечного сияния в году (рисунок 3). Щадящее воздействие оказывает на организм человека количество дней без солнца в году, малое количество дней без солнца в июле и около 58 % дней без солнца в январе.

Таблица 2. – Инсоляционный (световой) режим

Параметр	Воздействие			Санаторий «Берестье»
	раздражающее	тренирующее	щадящее	
Количество часов солнечного сияния в году	<1 700	1 700–2 000	2 000–2 300	1 822
Количество часов солнечного сияния в июле	<280	280–300	300–340	269
Количество дней без солнца в году	>140	100–140	60–100	99
Количество дней без солнца в июле	>3	2–3	1–2	1
Количество дней без солнца в январе	>25	20–25	10–20	18

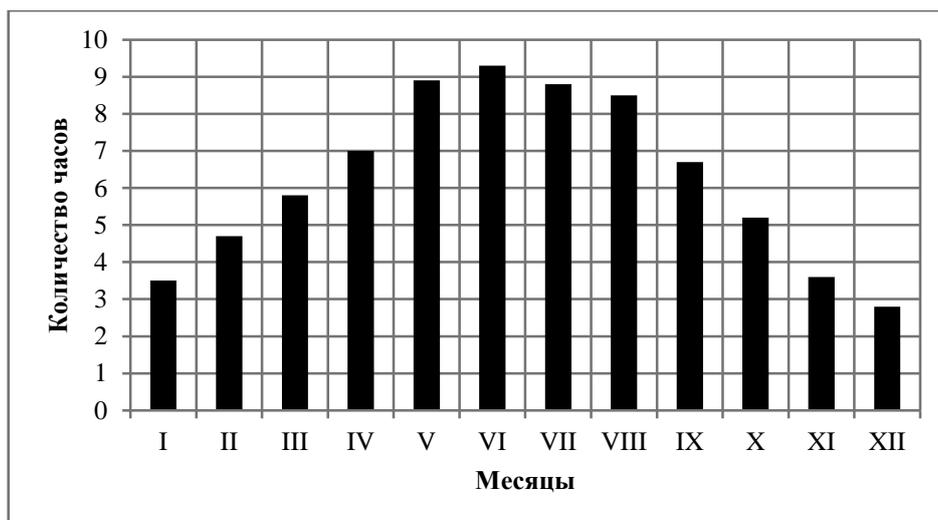


Рисунок 3. – Продолжительность солнечного сияния за день с солнцем, часы

С атмосферной циркуляцией связано перемещение воздушных масс. Человек реагирует на резкие изменения атмосферного давления и температуры. Существует средняя пороговая чувствительность человека: перепад температуры в  $6\text{ }^{\circ}\text{C}$  за сутки; перепад атмосферного давления в 5 мб за сутки, перепад содержания кислорода в воздухе в  $5\text{ г/м}^3$ . Люди, страдающие нарушениями артериального давления, сердечно-сосудистой системы, по-разному реагируют на эти изменения: у человека, страдающего гипотонией, возникает болезненная реакция на понижение атмосферного давления (гипобария), а у гипертоника – на его резкое повышение (гипербария) [6]. В таблице 3 даны критерии оценки параметров атмосферной циркуляции для биоклимата.

Наибольшее количество дней с перепадами давления в 5 мб наблюдается в зимний сезон, а также в переходные (особенно в ноябре и марте), в летнее время такие перепады встречаются редко. При этом среднее количество дней в санатории «Берестье» с межсуточной изменчивостью давления более 5 мб составляет около 110 дней.

Анализ межсуточного изменения температуры воздуха показал, что наибольшее количество дней с перепадами температуры в  $6\text{ }^{\circ}\text{C}$  наблюдается в осенне-весенний сезон, в то время как в летний период такие перепады встречаются редко. Перепады температуры  $6\text{ }^{\circ}\text{C}$  в среднем за год составляют 9 дней (2 %), что свидетельствует о щадящем режиме межсуточного изменения температуры.

Таблица 3. – Параметры атмосферной циркуляции, %

Параметр	Режим воздействия			Санаторий «Берестье»
	раздражающий	тренирующий	щадящий	
Повторяемость междусуточной изменчивости давления более 5 мб в сутки	>40	30–40	<30	30,4
Повторяемость междусуточной изменчивости температуры более $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ в сутки	>20	10–20	<10	2



Термический режим характеризуется продолжительностью периодов: безморозного; благоприятного для летней рекреации; благоприятного для зимней рекреации; купального периода, а также теплоощущением человека в холодный и зимний периоды и обеспеченностью теплом теплый период. Для рекреации очень важно учитывать термический дискомфорт как перегрева в летний период, так и переохлаждения в зимний.

Период, благоприятный для зимней рекреации, устанавливается, когда среднесуточная температура достигает  $-5^{\circ}\text{C}$ , но не ниже  $-25^{\circ}\text{C}$ , при этом возможны занятия всеми видами зимнего отдыха. В районе санатория «Берестье» такие условия могут формироваться в январе, и их продолжительность может составлять до двух недель, но, как правило, погода зимой неустойчивая, с регулярными оттепелями, поэтому снежный покров может за зиму устанавливаться и сходить несколько раз. Начало климатической зимы в последнее десятилетие приходится на конец декабря, а окончание – на конец февраля, т. е. продолжительность зимы составляет около 65 дней. Продолжительность безморозного периода на территории санатория составляет около 299 дней. Таким образом, по продолжительности безморозного периода территория санатория «Берестье» характеризуется щадящим режимом воздействия.

Благоприятный период летней рекреации определяется числом дней со среднесуточной температурой выше  $+15^{\circ}\text{C}$  (климатическое лето), при этом становятся возможными занятия всеми видами летнего отдыха. Таких дней в санатории насчитывается около 112. Начинается лето в среднем 18 мая, последний день летнего периода приходится на 6 сентября.

Теплоощущение в летний период подразделяется на: холодное (ЭЭТ менее  $8^{\circ}\text{C}$ ), прохладное (эквивалентно-эффективная температура (ЭЭТ) –  $8-16^{\circ}\text{C}$ ), комфортное (ЭЭТ –  $17-22^{\circ}\text{C}$ ), перегрев (ЭЭТ – более  $22^{\circ}\text{C}$ ) (таблица 4).

Таблица 4. – Среднее количество комфортных и субкомфортных дней на метеостанции Брест в мае – сентябре

Месяц	Количество дней с ЭЭТ		
	$<10^{\circ}\text{C}$	$10-18^{\circ}\text{C}$	$>18^{\circ}\text{C}$
май	14	15	2
июнь	6	14	10
июль	2	13	16
август	3	16	12
сентябрь	12	16	2

По обеспеченности теплом территория санатория «Берестье» попадает в зону щадящего режима. Продолжительность купального сезона определяется числом дней с температурой воды выше  $17^{\circ}\text{C}$ . На территории санатория «Берестье» продолжительность купального периода составляет 105 дней в году (таблица 5), что также свидетельствует о щадящем режиме (таблица 6).

Таблица 5. – Средняя продолжительность купального сезона за период 2001–2015 гг.

Река	Продолжительность	Начало	Окончание
Западный Буг	111	1–2-я декада мая	1–2-я декада сентября
Копаяовка	94	1-я декада июня	3-я декада августа
Мухавец	123	1-я декада мая	1-2-я декада сентября
Рыта	91	1-я декада июня	3-я декада августа



Таблица 6. – Характеристика термического режима

Параметр	Режим воздействия			Санаторий «Берестье»
	раздражающий	тренирующий	щадящий	
Продолжительность безморозного периода, дни	<90	90–180	>180	299
Обеспеченность теплом: повторяемость комфортных условий за теплый период (ЭЭТ = 17–22 °С), %	<11; >30	11–20	21–30	22–24
Продолжительность купального сезона, дни	<60	60–90	>90	105

С ветровым режимом связано воздействие воздушного потока на организм человека на уровне человеческого роста (в двухметровом слое воздуха). В соответствии с этим условия подразделяются на: аэростатические (штиль) (скорость ветра  $V = 0$  м/с), слабодинамические ( $V < 1$  м/с), среднединамические ( $V = 1–4$  м/с), сильнодинамические ( $V > 4$  м/с); при  $V > 7$  м/с проведение рекреационных занятий не рекомендуется.

Степень благоприятности ветрового режима определяется по повторяемости слабых ветров со скоростью  $<3$  м/с. В среднем за год на территории «Берестья» отмечается до 277 дней со скоростью ветра менее 3 м/с. Повторяемость этого типа ветра составляет 76 %, что характеризует щадящую степень ветровой нагрузки (таблица 7).

Таблица 7. – Степень ветровой нагрузки, %

Параметр	Режим воздействия			Санаторий «Берестье»
	раздражающий	тренирующий	щадящий	
Степень ветровой нагрузки (повторяемость слабых ветров: $V < 3$ м/с)	<30	30–50	>50	76

В биоклимате учитываются две основные характеристики влажности – относительная и абсолютная. Для рекреационных целей важна относительная влажность в дневные часы. Зимой почти повсеместно относительная влажность высокая, ее суточный ход не выражен, преобладают «влажные» дни с влажностью 80 %. В целом для здоровья людей благоприятна относительная влажность в 40–60 % (умеренно влажная погода), которая наблюдается в санатории на протяжении 58 дней в году. Количество дней с влажностью  $>80$  % (очень влажно) наблюдается до 150 дней, а с относительной влажностью от 60 до 80 % (умеренно влажная погода) повторяются около 144 дней. На долю умеренно сухой погоды (относительная влажность от 21 до 40 %) приходится менее 1 % в структуре режима воздействия влажности воздуха, а относительная влажность  $<20$  % практически не наблюдается. Таким образом, согласно медико-климатической характеристике режима влажности территория Брестской области отличается раздражающим режимом воздействия.

С абсолютной влажностью связано такое дискомфортное явление, как духота, которое формируется при относительной влажности более 80 % и среднесуточной температуре выше  $+20$  °С. Оно наблюдается в теплый период года (таблица 8). Повторяемость душных дней за теплый период составляет 8–11 %, что свидетельствует о щадящем режиме воздействия.



Таблица 8. – Среднее количество душевых дней в 2001–2015 гг. на метеостанции Брест

апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь
2	4	4	4	5	3	–

Режим осадков. Зимой по продолжительности залегания снежного покрова определяют пригодность территории к занятиям лыжным туризмом. Продолжительность залегания устойчивого снежного покрова в санатории «Берестье» составляет около 79 дней (таблица 9), что свидетельствует о тренирующем режиме.

Таблица 9. – Залегание устойчивого снежного покрова

Число дней со снежным покровом	Средняя дата				
	первое проявление	образование устойчивого залегания	разрушение	последний сход	режим воздействия
79	21.XI	28.XII	5.III	30.III	тренирующий

Летом важно знать повторяемость дождливой погоды, что препятствует рекреационным занятиям. Дождливым принято считать день, когда выпадает более 3 мм осадков (в дневное время), однако это относительная величина. Например, ливневые дожди на юге, которые наблюдаются в летний период, не являются существенным ограничением, т. к. они кратковременны, не мешают отдыху, наоборот, освежают воздух после полуденного зноя. В среднем за год в районе санатория «Берестье» дождливая погода составляет 58–60 дней. Анализ режима осадков показал, что повторяемость дождливых погод не превышает 25 %, что свидетельствует об оптимальном режиме воздействия.

Таким образом, анализ распределения биоклиматических параметров в течение года выявил, что наиболее комфортные условия по всем показателям для рекреационных целей на исследуемой территории формируются в летнее время, а наиболее дискомфортные – в зимний период, в то время как переходные (весна и осень) сезоны характеризуются как благоприятными, так и дискомфортными условиями.

Площадь зеркала оз. Рогознянское составляет около 0,43 км<sup>2</sup>, длина – около 1,1 км, наибольшая ширина – около 0,67 км, максимальная глубина – 5,8 м, длина береговой линии – около 3,6 км. Объем воды около 1 млн. м<sup>3</sup>. Озеро Рогознянское относится к бассейну р. Середовая Речка. На юго-западе озеро окаймлено широкой заболоченной поймой, к которой примыкает обширный пойменный луг. Берега преимущественно возвышенные, песчаные, с западной стороны сплавинные. Мелководье узкое (на западе обширное), песчаное, глубже – песчано-илистое и сапропелистое. Наибольшие глубины находятся в центральных частях западного и восточного плесов, максимальная – примерно в 0,19 км на запад от восточного берега восточного плеса. Зарастает умеренно. На юго-западе каналом соединено с оз. Белое, а вытекающей р. Середовая Речка соединено с системой мелиоративных каналов и р. Западный Буг [1]. Оценка оз. Рогознянское для развития пляжно-купального отдыха показала, что озеро имеет 16 баллов из 21 возможного, большим баллом обладает лишь оз. Белое (19 баллов) (рисунок 4).

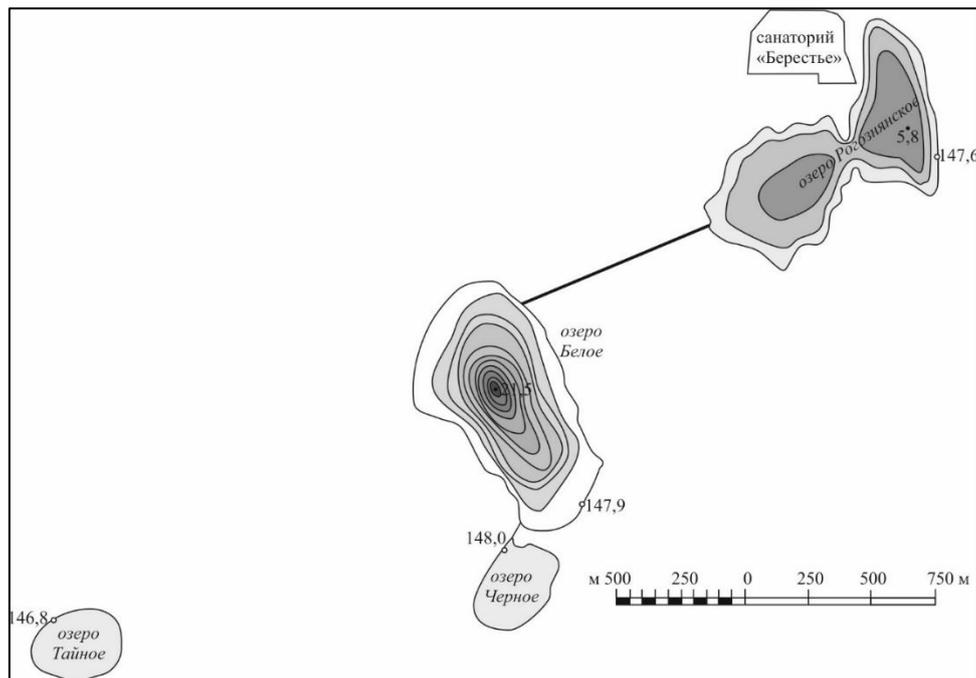


Рисунок 4. – Карта глубин озер Рогозьянское и Белое

Значение растительного покрова в качестве *рекреационного ресурса* очень велико, т. к. с ним связано оздоровительное влияние ландшафта благодаря ионизационным и фитонцидным свойствам растений. Особенно велика роль лесов: именно лесные массивы способствуют повышению содержания кислорода в воздухе и его ионизации.

Санаторий «Берестье» располагается на территории Республиканского ландшафтного заказника «Прибужское Полесье», флора которого насчитывает свыше 700 видов высших сосудистых растений. Для чистоуста величавого Прибужское Полесье является единственным местом произрастания в Восточной Европе, а для щитолистника обыкновенного и мытника лесного – в Белорусском Полесье. В начале 1990-х гг. отмечено новое для Беларуси древесное растение – омела австрийская.

Здесь одновременно можно встретить субарктические виды (толокнянка обыкновенная\* (здесь и далее \* отмечены лекарственные растения – Авт.), багульник болотный\* – представители лесотундры), понтические виды (клевер горный, лапчатка серебристая, тимopheевка степная, овсяница полесская – представители южных степей), бореальные виды (кочедыжник женский, вахта трилистная\*, голубика, черника, брусника, калужница болотная\*, плаун годичный\*, ель обыкновенная, ива ломкая, распространенные в таежной зоне) и неморальные виды (граб обыкновенный, вяз гладкий и вяз шершавый, липа мелколистная, перелеска благородная\*, звездчатка ланцетолистная, сныть обыкновенная, копытень европейский\* – типичные обитатели смешанных и широколиственных лесов Европы), атлантические виды (жарновец метельчатый, булавоносец седой, вереск, произрастающие в прибрежной атлантической части Европы) и сарматские виды (гвоздика песчаная, кровохлебка аптечная, астрагал песчаный, шпашник черепитчатый) – распространенные между континентальными бореальными лесами и степями.

Здесь произрастают более 30 видов растений и грибов, включенных в Красную книгу Республики Беларусь. В водоемах встречается очень редкое водное насекомояд-



ное растение – альдрованда пузырчатая – реликтовый вид. Флора этой территории интересна многообразием произрастающих здесь орхидей. Среди разреженных широколиственных и хвойно-широколиственных лесов вблизи опушек, на богатых кальцием почвах произрастает одна из самых красивых и редких орхидей умеренного пояса – венерин башмачок настоящий; в лиственных и светлых хвойных лесах, на сухих лесных полянах и опушках растет дремлик темно-красный, на замшелых участках заболоченных хвойных, смешанных и лиственных лесов в затененных местах встречается ладьян трехнадрезный. На открытых лесных болотах, сырых и заболоченных лугах можно встретить пальчатокоренник майский, ставший исключительно редким в Европе. Под пологом дубрав огромные площади сплошных зарослей образует одна из немногочисленных белорусских лиан – плющ обыкновенный. Тут же под пологом дубов и грабов произрастают любка зеленоцветковая, пыльцеголовник красный, в сырых хвойных и лиственных лесах – тайник яйцевидный. По окраинам открытых лесных болот, на сырых лугах и опушках лесов можно увидеть редкие красивые растения – касатик сибирский и шпажник черепитчатый.

Из лесной растительности небольшими фрагментами или массивами представлены почти все формации лесов Беларуси. Главными лесообразующими породами являются: сосна, ольха черная, береза, дуб. Также в древостое представлены грабовые, еловые, кленовые, липовые, ясеневые и осиновые леса. Совершая пешие прогулки, можно встретить пойменные леса, типичные европейские широколиственные и северные таежные леса, можжевеловые редколесья и вересковые пустоши и исчезающие, исключительно редкие для Беларуси сообщества песчаных лугов. В пойме р. Зап. Буг сохранились естественные пойменные низинные эвтрофные луга, представлены фрагменты остепненных лугов. Среди лесов на пониженных участках разбросаны небольшие болотные массивы, преимущественно низинные, но также и фрагменты переходных и верховых болот.

Живописность местности определяется сочетанием двух или трех компонентов ландшафта (пересеченный рельеф, водный объект, разнообразный растительный покров), чередованием открытых и закрытых пространств (лес, пашня, луг, болото), наличием видовых панорам (утесы, обрывы, открытые водоемы) и колористическим разнообразием пейзажа. Оптимально, когда имеются все три компонента ландшафта, такие компоненты имеются на территории санатория «Берестье». Природный ландшафт характеризуется высокими эстетическими и оздоровительными свойствами, а также отвечает планировочным требованиям, предъявляемым при проектировании климатолечебных сооружений, прокладки маршрутов терренкура, маршрутов ближнего туризма. Природный комплекс устойчив к рекреационным нагрузкам.

### **Заключение**

Природные условия территории санатория «Берестье» оцениваются как благоприятные для лечебно-оздоровительного использования, а их курортологический потенциал достаточен для организации бальнеотерапии, климатотерапии, как специальных методов лечения. Таким образом, оценка природных ресурсов территории санатория «Берестье» показывает, что они являются достаточно благоприятными для использования их в качестве лечебных природных факторов.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блакітная кніга Беларусі : энцыклапедыя / рэдкал.: Н. А. Дзісько [і інш.]. – Мінск : Беларус. энцыкл., 1994. – 415 с.
2. Матвеев, А. В. Рельеф Белоруссии / А. В. Матвеев, Б. Н. Гурский, Р. И. Левицкая. – Минск : Выш. шк., 1988. – 319 с.
3. План управления лесами, важными для сохранения биоразнообразия и участками с уникальными экосистемами. – Брест : ГЛХУ «Брестский лесхоз», 2010. – 54 с.
4. Севостьянова, С. А. Эколого-экономическая оценка рекреационных ресурсов : учеб. пособие / С. А. Севостьянова. – СПб. : СПбГИЭУ, 2008. – 190 с.
5. Станкевич, Р. А. Артезианские воды Бреста и их использование. Природные условия, история освоения и пути прогресса / Р. А. Станкевич – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2004. – 184 с.
6. Хайруллин, К. Ш. Климатические ресурсы и методы их представления для прикладных целей / К. Ш. Хайруллин. – СПб. : Гидрометеиздат, 2005. – 231 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 01.10.2020*



УДК 549. 082(476)

**Николай Федорович Гречаник**

*канд. геогр. наук, доц., доц. каф. географии и природопользования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

**Mikalai Grachanik**

*PhD in Geographical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Geography and Environmental Management  
of Brest State A. S. Pushkin University  
e-mail: Hrachanik55@mail.ru*

## **МИНЕРАЛЬНЫЙ СОСТАВ МЕЛКООБЛОМОЧНОГО МАТЕРИАЛА ТЯЖЕЛОЙ ФРАКЦИИ СОЖСКИХ МОРЕННЫХ ОТЛОЖЕНИЙ НА ТЕРРИТОРИИ ВЫСОКОВСКОЙ РАВНИНЫ**

*Охарактеризован минеральный состав мелкообломочного материала тяжелой фракции сожских моренных отложений на территории Высоковской моренно-водно-ледниковой равнины. Песчаный материал моренных аккумуляций насыщен различными минералами тяжелой фракции, которые высвобождались из разрушающихся дальнепринесенных и местных горных пород во время припятского оледенения сожского времени. Минеральный состав песчаных моренных аккумуляций полимиктовый.*

### ***Mineral Composition of Fine-Detrital Material of the Heavy Fraction of the Sozh Moraine Deposits in the Territory of the Vysokovskaya Plain***

*The article describes the mineral composition of the fine-detrital material of the heavy fraction of the Sozh moraine deposits on the territory of the Vysokovskaya moraine-water-glacial plain. The sandy material of moraine accumulations is saturated with various minerals of the heavy fraction, which were released from the crumbling distant and local rocks during the Pripyat glaciation of the Sozh period. Mineral composition of sandy moraine accumulations is polymictic.*

### **Введение**

Изучение петрографического и минерального состава различных фракций обломочного материала ледниковых аккумуляций, установление источников сноса такого материала является одним из основных методов при исследовании древних покровных ледниковых отложений и реконструкции динамики ледниковых покровов. Территория равнины в четвертичное время неоднократно подвергалась экспансии покровных материковых оледенений. В процессе динамики покровных ледников подвергались экзарации породы, которые сформировались в различных фациальных обстановках большого промежутка геологического времени.

После деградации припятского ледникового покрова сожского времени на территории равнины сформировались отложения ледниковой формации. Ледниковый покров этого времени в геолого-геоморфологической истории среднелепистоценового развития территории равнины был последним. В результате деградации этого покровного глетчера сформировался ледниковый комплекс рельефообразующих отложений, определяющий современный физиономический облик поверхности равнины.

Кроме того, при таянии (абляции) покровного ледника определенная часть находящегося на поверхности и включенного в него обломочного материала выносилась тальными водами, а некоторая часть в промытом виде оседала и формировала чехол на основной морене. Такой покров имеет рыхлое сложение, малую мощность и мозаичное размещение на территории равнины. Он состоит из песчано-гравийно-галечного мате-



риала с примесью мелкозема и повышенным содержанием разноразмерных валунов в верхней части сформированных моренных отложений. В поозерское время эта территория развивалась в перигляциальных условиях. В настоящее время материал моренных аккумуляций подвергается воздействию дождевых и талых вод, эоловых процессов и хозяйственной деятельности человека, которая связана с различными видами освоения ее территории.

Целью данной работы является установление качественного минерального состава мелкообломочного материала тяжелой фракции размерностью 0,25–0,1 мм моренных отложений припятского оледенения сожского времени на территории Высоковской моренно-водно-ледниковой равнины.

### **Характеристика района работ**

Район работ расположен на западе Республики Беларусь. Высоковская моренно-водно-ледниковая равнина с краевыми ледниковыми образованиями является одним из геоморфологических районов Беларуси. В территориально-административном отношении большая часть территории геоморфологического района лежит в пределах Каменецкого, а также в северной части Брестского р-на. Речная долина Правой Лесной отделяет этот район от Вискулянско-Шерешевской равнины, а по левобережной части долины р. Лесная район граничит с Каменецкой равниной. С западной стороны проходит Государственная граница с Республикой Польша [1].

Территория вытянута с севера на юг на 54 км, с запада на восток – на 30–35 км. В генетическом отношении рельеф Высоковской равнины образует парагенетический комплекс зон ледниковой аккумуляции и перигляциальной зоны, который включает ряд ступеней рельефа: краевые ледниковые гряды; участки моренной равнины; участки водно-ледниковой равнины; участки озерно-аллювиальной низины; долины рек.

В целом для современной земной поверхности территории равнины характерна выраженная ярусность рельефа. Верхний ярус с абсолютными отметками более 175 м образуют останцы денудированных конечно-моренных гряд и холмов.

Территории с отметками 165,0–175,0 м и 155,0–160,0 м образуют два яруса пологоволнистых моренных и водно-ледниковых участков равнины, осложненных холмами. Еще ниже на абсолютных отметках 145–150 м располагаются плоские слабоогнутые, в значительной степени заболоченные озерно-аллювиальные низины [2].

Высотные отметки 140–121 м занимают речные долины, среди которых выделяются долины рек. Пульвы, Правой Лесной, Лесной и Зап. Буга.

Речные долины врезаны в отложения окружающих территорий на 10–50 м и занимают самый низкий гипсометрический уровень земной поверхности. Высотные ярусы различаются не только гипсометрическим положением, но и возрастом, генезисом, а также строением.

### **Материал и методы**

Материал для исследований отбирался из естественных и искусственных обнажений на 22 участках моренной равнины в период с 2009 по 2019 гг. Моренные отложения региона изучались общепринятым комплексом литологических и минералогических методов.

Проведены детальные полевые исследования в хорошо расчищенных обширных, разноглубинных выработках с отбором проб песчаного материала и выветрелых до состояния дресвы образцов горных пород, с прослеживанием характера контактов и усло-



вий залегания отложений для установления питающих провинций и путей переноса обломочного материала.

Отбор и исследование песчаной фракции производились с поверхности ледниковых (моренных) форм рельефа, расположенных в окрестностях деревень Мельники, Пяски, Бордзевка, Лесок, Чепели, Проходы, Кошеники. В ходе полевых исследований было отобрано 125 проб песчаного материала объемом 8–10 л и 27 проб дресвы гранитных и гнейсовых пород из моренных отложений в обнажающихся стенках карьерных выработок.

Песчаный материал проб подвергался шлихованию (промывке) с помощью шлихового лотка. Сущность этого приема заключается в обогащении проб минералами тяжелой фракции, что достигается удалением с помощью воды из пробы глинистых, алевритистых частиц и некоторого объема минералов легкой фракции.

Промывка проб с помощью лотка осуществлялась до «серого» шлиха. Для палеографических целей определения питающей провинции, установления присутствия минералов-спутников способ отмычки до «серого» шлиха позволяет получить корректные данные по полному минеральному составу песчаной породы как в тяжелой, так и в легкой фракциях.

После промывки шлиха полученный концентрат высушивался и с помощью сит разделялся на соответствующие размерные фракции. Последующее разделение материала фракции 0,25–0,1 мм по удельному весу на тяжелые и легкие минералы производилось по стандартной методике с использованием бромформа (трибромметана) состава  $\text{CBr}_3$  ( $G = 2,7$ ) и йодистого метилена состава  $\text{CH}_2\text{I}_2$  ( $G = 3,33$ ). Для стабилизации бромформа прибавляли 4 % спирта и доводили раствор до удельного веса 2,89. Стабилизация йодистого метилена осуществлялась ацетоном ( $G = 0,79$ ).

В бромформе зерна кварца всплывают, а турмалин и гранат тонут. Зерна кварца из пробы удалялись, а турмалин и гранат промывались в ацетоне и в дальнейшем разделялись в йодистом метилене. Турмалин при этом всплывает, а гранат тонет.

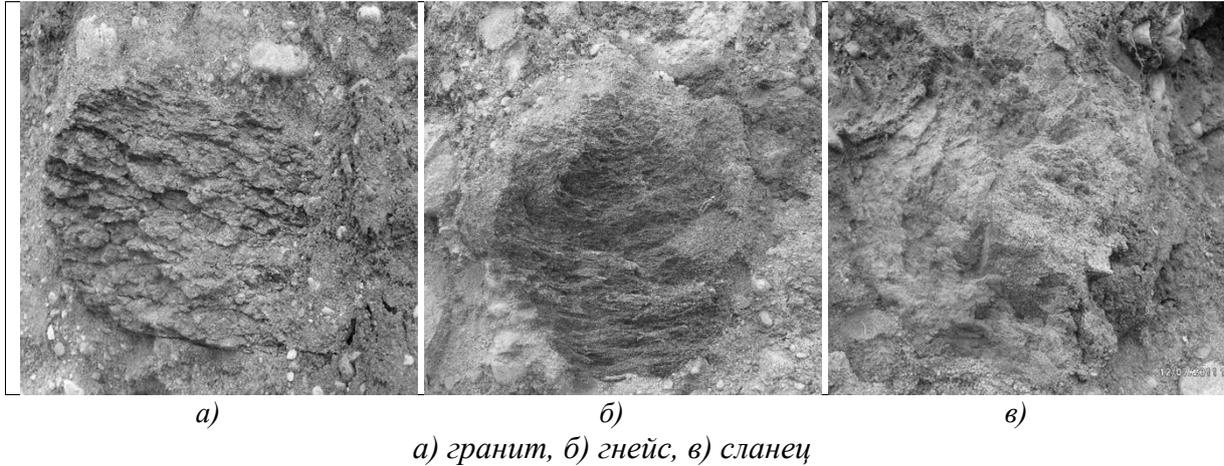
Для определения минерального состава материал вышеназванной тяжелой фракции просматривался под бинокулярным стереоскопическим микроскопом МБС-10. Размерный диапазон 0,25–0,1 мм достоверно отражает минеральный состав собственно ледниковых песчаных аккумуляций как генетического типа.

Эта размерная фракция отличается в ледниковых отложениях незначительными количественными и качественными различиями состава, хорошо расситовывается, довольно просто выделяется ее тяжелая составляющая.

Дресвяный материал гранитов и гнейсов изучался с целью выделения из него руководящих минералов группы амфиболов и граната для определения кристаллических форм устойчивых минералов.

Обломочный материал дресвы кристаллических пород изучался с помощью микроскопа и сравнивался с изученными плотными образцами кристаллических горных пород валунной размерности.

Некоторые крупные валуны гранитоидов и гнейсов в моренных отложениях у деревень Бордзевка и Проходы сильно выветрелые и при прикосновении к ним рассыпаются на мелкие дресвяные обломки минералов (рисунок). Для определения питающих провинций и мест поступления песчаного обломочного материала моренных отложений использовались карты и литературные источники [5–9].



**Рисунок. – Дресвяные валуны моренных отложений карьеров деревень Бордзевка и Проходы**

#### **Результаты исследования**

Изучение минерального состава, особенностей распределения минералов в ледниковых отложениях, выделение минеральных ассоциаций составляет основу для выделения питающих петрографических источников, выяснения особенностей транспортировки разнообломочного материала.

Тяжелые минералы включают большую группу индивидов различного генезиса, которые первоначально формируются в гипогенных условиях. Это в большинстве своем темноокрашенные, аллотигенные (принесенные из других мест) минералы, относящиеся к химическому классу силикатов и окислов с плотностью от 2,75– до 5 г/см<sup>3</sup> и выше. Эти минералы в процессе их изучения отделяются от широко распространенных легких минералов плотностью менее 2,75 г/см<sup>3</sup> в тяжелых жидкостях методом сепарации или искусственным шлихованием. В естественных природных процессах с участием воды при природном шлиховании они формируют разноразмерные темноокрашенные прослойки в различных генетических типах четвертичных отложений, в т. ч. и моренных.

Состав тяжелых минералов четвертичных пород Беларуси насчитывает более 50 минеральных видов, не превышая при этом 30–35 разновидностей, чаще едва достигает 20–25 наименований. Доминирующую часть тяжелых минералов (10–20 %) составляют амфиболы, гранаты, ильменит, циркон, эпидот, цоизит. Содержание биотита, лимонита, магнетита, турмалина, апатита, пироксенов, рутила, ставролита и тяжелых фосфатов составляет от 2 до 10 %. Сфен, дистен, лейкоксен, силлиманит, андалузит, мусковит, брукит, топаз, хлорит, монацит, анатаз, глауконит составляют до 1 %. Очень редко из тяжелых минералов отмечаются касситерит, флюорит, эвдиалит [3].

Среди тяжелых минералов сожской морены на территории равнины доминируют аллотигенные минералы. Среди них по составу выделяются минералы группы амфиболов и пироксенов.

Характерной особенностью амфиболов является то, что в их кристаллических структурах принимают участие сдвоенные ленты кремнекислородных тетраэдров состава  $[\text{Si}_4\text{O}_{11}]^{6-}$ . Остающийся ион кислорода входит в состав самостоятельного одновалентного аниона  $[\text{OH}]^{1-}$  [4]. Амфиболы отличаются широким разнообразием химического состава, а по многим физическим свойствам сходны между собой. В песчаной тяжелой фракции 0,25–0,1 мм моренных отложений равнины диагностированы следую-



шие минералы группы амфиболов: тремолит, актинолит, роговая обманка, глаукофан, арфведсонит (моноклинные амфиболы) и антофиллит (ромбический амфибол). В количественном отношении представители амфиболов, особенно роговая обманка, доминируют среди других минералов. Приблизительно одинаковое количество в этой фракции приходится на представителей класса окислов – ильменита и магнетита. В некоторых разрезах моренной толщи равнины (Мельники и Коценики) эти минералы в количественном отношении доминируют над амфиболами.

**Тремолит** в песчаной фракции вышеназванного размера выглядит в виде угловато-окатанных, реже удлиненных зерен серой окраски с характерным стекляннным блеском. Основным источником минерала в ледниковых отложениях являются кристаллические, глаукофановые сланцы и роговики.

**Актинолит.** Удлиненные и угловатые призматические зерна различной степени окатанности этого минерала с характерным зеленовато-желтым цветом широко распространены в песчаной фракции моренных отложений равнины. Источником этого минерала в ледниковых аккумуляциях являются кристаллические сланцы и породы основного состава, подвергшиеся гидротермальному метаморфизму на территории северо-западной части Восточно-Европейской платформы.

**Роговая обманка** является доминантным минералом среди амфиболов в составе тяжелой фракции. В поле бинокулярного микроскопа минерал выглядит в виде угловатых, угловато-окатанных и окатанных, удлиненных пластинчатых зерен с неровными краями, отличающихся стекляннным, реже шелковистым блеском зеленовато-серой окраски. Обыкновенная роговая обманка является типичным минералом интрузивных изверженных пород, чаще средней основности: сиенитов, диоритов, гранодиоритов и породообразующим минералом метаморфических горных пород – амфиболитов, амфиболитовых сланцев и гнейсов, которые широко распространены в составе валунного материала ледниковых отложений равнины, поступивших из Фенноскандии.

**Глаукофан** в песчаной тяжелой фракции выделяется в виде удлиненных, чаще окатанных зерен серовато-синей окраски. **Глаукофан, арфвердсонит** и **антофиллит** среди амфиболов тяжелой фракции песчаных отложений не имеют широкого распространения. Основным источником этих минералов являются метаморфические породы, кристаллические слюдяные, глаукофановые и эпидотовые сланцы северо-западной части Восточно-Европейской платформы.

Минералы группы пироксенов относятся к цепным силикатам с одинарными цепочками  $[\text{SiO}_3]^{2-}$ . По кристаллографическим признакам в этой обширной группе минералов выделено две подгруппы – моноклинных и ромбических пироксенов [4]. В песчаной тяжелой фракции 0,25–0,1 мм моренных отложений равнины диагностированы следующие минералы группы пироксенов: авгит, геденбергит, сподумен, эгирин (моноклинные пироксены), энстатит, гиперстен (ромбические пироксены). Пироксены в количественном отношении в сравнении с амфиболами в песчаной фракции распространены гораздо меньше и сравнимы в количественном отношении с такими минералами, как силлиманит, ставролит и гидрослюды железа.

**Авгит.** Этот минерал в составе тяжелой фракции имеет максимальное распространение среди других представителей пироксенов. Окраска минерала желтовато-зеленая, зеленая, черная, реже бурая. Блеск стекляннный, иногда матовый. В некоторых пробах песчаного материала отмечены хорошо сохранившиеся кристаллические коротко-столбчатые, таблитчатые формы кристаллов и кристаллы в виде двойников с деформированными гранями. Некоторые кристаллы авгита в поперечном сечении имеют форму



восьмиугольника, что является характерным диагностическим признаком этого минерала. Основным источником этого минерала в моренных отложениях равнины являются магматические обломочные породы основного (габбро, диабазы, базальты) и среднего (диориты) состава, а также метаморфические породы.

**Геденбергит** отличается темно-зеленой окраской угловатых обломков типичного стеклянного блеска. От других пироксенов отличается своей хрупкостью. Основным источником его являются скарновые породы Кольского полуострова и территория Карелии.

**Сподумен** в песчаной тяжелой фракции выделяется желтоватой, реже розоватой окраской, слабо перламутровым блеском, обломками кристаллов с зазубренными краями. На некоторых кристаллических формах четко выделяется продольная штриховка, что является важным диагностическим признаком этого минерала. Основным источником служат щелочные гранитные пегматиты Швеции и Кольского полуострова.

**Эгириин** представлен неправильными угловатыми, угловато-окатанными, окатанными зернами с матовой поверхностью, обломками зеленовато-черной окраски, стеклянного блеска. Основным источником этого минерала – моренные отложения равнины, нефелиновые сиениты и их пегматиты Кольского полуострова.

**Энстатит и гиперстен** среди пироксенов в тяжелой фракции не имеют большого распространения. Обломки этих минералов отличаются буровато-зеленой окраской, стеклянным блеском. Гиперстен отличается от энстатита проявлением магнитных свойств и разлагается в подогретой соляной кислоте. Основным источником минералов являются пироксен-амфиболовые, биотитовые и гранатовые гнейсы северо-западной части Восточно-Европейской платформы.

Пироксены и амфиболы являются типичными метасиликатами. Несмотря на существенное различие в количественных соотношениях составляющих компонентов, эти минералы имеют ряд общих характерных внешних черт: аналогичный облик кристаллов, близкие кристаллические структуры, одинаковую степень проявления спайности, много общего в оптических свойствах, близкие удельные веса, близкую твердость. Среди катионов в пироксенах и амфиболах представлены следующие химические элементы:  $Mg^{2+}$ ,  $Fe^{2+}$ ,  $Ca^{2+}$ ,  $Na^{1+}$ , иногда  $Li^{1+}$ , а также  $Al^{3+}$  и  $Fe^{3+}$ , а среди анионов  $[SiO_4]^{4-}$  иногда  $[AlO_4]^{5-}$ , а также  $[OH]^{1-}$ ,  $F^{1-}$  и  $Cl^{1-}$  в амфиболах [4]. Наибольшим распространением в природе имеют железо-магнезиальные пироксены и амфиболы, являющиеся основными породообразующими минералами магматических и метаморфических горных пород в пределах Фенноскандии и северо-западной части Восточно-Европейской платформы.

**Гранаты.** Повышенное содержание гранатов в составе тяжелой фракции связано с наличием основного их источника кристаллических пород из Фенноскандии. В результате ледникового переноса они подвергались разрушению и высвобождению из них гранатов. В выветрелых до состояния дресвы гранитных и гнейсовых валунах гранаты имеют кристаллическую форму ромбического додекаэдра и трапецоида, они, как правило, «свежие» и неокатанные. Ранее высвобожденные из кристаллических пород гранаты в процессе транспортировки приобретают угловатую форму, грани их истерты, а некоторые из них имеют округлую, окатанную форму. Последние поступили в материал сожской морены из отложений припятского ледника днепровского времени, подвергшихся переработке и ассимиляции сожским ледниковым покровом. Наиболее часто в тяжелой песчаной фракции отмечается альмандин, отличающийся большой химической и физико-механической устойчивостью. Реже встречаются зерна гроссуляра зеленой и желто-зеленой окраски и коричневого эссонита (железистая разновидность гроссуляра).



**Ильменит.** Минерал разной степени окатанности в виде неправильных, округлых, угловатых зерен, в меньшей степени толстотаблитчатой формы и в виде шестиугольных пластинок. Блеск стально-серый, иногда с малиновым оттенком. Цвет железно-черный. В материале тяжелой фракции в количественном отношении доминирует над другими рудными минералами.

**Циркон** отмечается в виде короткостолбчатых, реже длиннопризматических обломков кристаллов или хорошо окатанных или боченовидных разностей. Цвет желтый, коричневый, фиолетово-красный и бурый, блеск от стеклянного до искристого алмазного. Источником циркона являются граниты, гранодиориты, диориты, кристаллические сланцы и гнейсы Фенноскандии.

**Магнетит** по количественному содержанию является вторым рудным минералом после ильменита и внешне по форме обломков, цвету и блеску похож на него. Четко определяется по проявлению свойства магнитности, отделяясь от похожего ильменита и черного рутила. Основным источником минерала в моренных отложениях являются породы основного и ультраосновного состава, а также кристаллические сланцы, кварциты Карелии и Швеции.

**Эпидот** в тяжелой фракции отличается в виде неправильных зерен, реже обломков вытянутых кристаллов призматического облика фиштакково-зеленого, желтовато-зеленого и темно-зеленого цветов стеклянного блеска.

**Турмалин** в составе песчаной тяжелой фракции отличается разнообразием окраски: от синего, зеленого, розового, их вариаций (полихромные разности) до темно-бурого и черного. Блеск минерала стеклянный, иногда жирный. Форма в виде призматических кристаллов с хорошо сохранившимися вершинными частями с наличием вертикальной штриховки на гранях, а также угловатых, угловатоокатанных обломков трех- реже шестиугольников.

**Рутил** красного, красно-коричневого цвета в виде удлиненных тетрагональных кристаллических обломков, окатанных и угловато-окатанных зерен металлического и бриллиантово-металлического блеска довольно широко распространен в моренных песках региона.

**Астрофиллит** золотисто-бурой, бронзово-желтой окраски в виде тонких обломков кристаллов призматической формы в незначительном количестве отмечается в составе тяжелой фракции.

**Оливин** в виде короткостолбчатых обломков кристаллов и зерен неправильной остроугольной и угловатоокатанной формы, стеклянного, воскового блеска, бутылочно-зеленого, реже бурого цвета диагностирован приблизительно в одинаковых количествах во всех изученных пробах тяжелой фракции.

**Ставролит.** Минерал красновато-бурого, красновато-коричневого цвета, стеклянного блеска, в виде угловато-окатанных, окатанных, реже обломков короткопризматической формы присутствует в материале тяжелой фракции в небольшом количестве.

**Апатит** в песчаной тяжелой фракции отмечается нечасто. Цветовая гамма от бесцветного белого до голубовато-зеленого и даже темно-бурого. Зерна округлой формы.

**Биотит, мусковит.** Эти минералы широко распространены как в легкой, так и тяжелой фракции моренных песков. Отмечены в виде желтовато-бурых, зеленовато-коричневых, черных (мусковит) пластинок и спайных чешуек округлой и неправильной формы. Края неровные, зубчатые. Блеск тускло-восковый. Данные минералы в больших количествах высвобождаются из дресвяных валунов гранита и гнейса в обнажающихся стенках карьерных выработок у деревень Кошеники, Бордзевка, Чепели и Проходы.



**Силлиманит** встречается в виде окатанных удлинённых, реже уплощённых призматических зерен с округлыми и угловатыми очертаниями. Некоторые обломки кристаллов имеют вертикальную штриховатость. Блеск минерала стеклянный, цвет – желтоватый, светло-серый. В нагретом растворе азотнокислого кобальта зерна минерала приобретают синюю окраску.

**Касситерит** в тяжелой минеральной фракции отмечен в небольших количествах в виде призматических, пирамидальных, угловато-окатанных зерен. Окраска минерала черная, бурая. Блеск металлический, тусклый, в изломе смоляной. При взаимодействии цинка с соляной кислотой и добавлении в пробирку выделенных под микроскопом зерен касситерита последний покрывается серебристо-белой тонкой пленкой восстановленного олова. Этим способом возможно определить содержание касситерита в пробах с похожими на него минералами по внешним признакам.

**Топаз** в тяжелой фракции встречается единичными зернами и представлен прозрачными бесцветными, реже желтоватыми, голубоватыми слабоокатанными, реже остроугольными зернами. Во многих зернах имеются округлой формы газовые включения и включения темных минералов. Это один из диагностических признаков топаза.

**Эвдиалит** в тяжелой фракции встречается единичными зернами и представлен обломками неправильной формы, иногда тонкими пластинками яркой розовой окраски. Блеск стеклянный. По окраске он похож на гранат и на розовый турмалин. Выделенные зерна минерала, помещенные в соляную кислоту, проявили реакцию на цирконий (оранжевая окраска куркумовой бумажки), что дало возможность отличить его от граната и турмалина. Источником вышеперечисленных минералов тяжелой фракции моренных отложений Высоковской равнины, начиная от эпидота до эвдиалита, являются различные породы территории Фенноскандии.

**Глауконит** в тяжелой фракции отмечается в виде лимонитизированных комковидных, округлых, лепешкообразных зерен зеленой, ржаво-бурой окраски. В моренные отложения равнины глауконит поступал из ордовикских и силурийских отложений Прибалтики, палеогеновых и неогеновых отложений Беларуси.

**Лимонит** является наиболее распространенным аутигенным (возникшим в результате вторичных процессов) тяжелым минералом самой верхней части разреза моренных отложений. Его формирование связано с изменением железосодержащих минералов – сульфидов, карбонатов, силикатов. Он отмечается в виде угловатых обломков и окатанных зерен и их скоплений в форме оолитов.

**Доломит**, встречаемый в тяжелой фракции, представлен неправильными угловатыми зернами, новообразованными таблитчатыми и ромбоэдрическими кристаллами. Окраска минерала светло-серая, буроватая, желтая. Минерал относится к классу карбонатов. Источником лимонита и доломита в моренных отложениях является местная питающая провинция.

Охарактеризованные тяжелые минералы размерной фракции 0,25–0,1 мм по количественному наличию их в песчаных моренных отложениях равнины можно разделить на четыре группы. В первой, представленной наиболее часто, распространенными являются амфиболы, гранат (альмандин, реже гроссуляр и эссонит), ильменит, циркон, магнетит и эпидот. Вторую группу составляют турмалин, пироксены, рутил, астрофиллит, оливин, ставролит, лимонит, апатит и биотит. Третья группа включает силлиманит, сфен, мусковит, глауконит и доломит. Минералы четвертой группы составляют незначительное количество и включают касситерит, топаз и эвдиалит.



### Заклучение

Базируясь на анализе особенностей размещения и минерального состава песчаного материала тяжелой фракции 0,25–0,1 мм моренных отложений припятского ледника сожского времени на территории Высоковской равнины, можно сделать следующие выводы:

- 1) среди тяжелых минералов сожской морены на территории равнины доминируют аллотигенные минералы;
- 2) минеральный состав тяжелой фракции моренных отложений равнины полимиктовый;
- 3) в результате изучения песчаного материала гранулометрической фракции 0,25–0,1 мм моренных отложений сожского времени на территории равнины выделено четыре группы тяжелых минералов;
- 4) доминирующими в тяжелой фракции моренных отложений являются представители первой группы минералов, источником которых являются кристаллические породы Фенноскандии и северо-западной части Восточно-Европейской равнины;
- 5) минералы химического класса силикатов в тяжелой фракции доминируют над минералами класса оксидов, фосфатов и карбонатов;
- 6) минералы местной питающей провинции в тяжелой фракции песчаных моренных аккумуляций в количественном отношении не имеют большого распространения и представлены глауконитом, лимонитом и доломитом.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гречаник, Н. Ф. Характеристика геоморфологических районов территории Подляско-Брестской впадины / Н. Ф. Гречаник // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 5, Хімія. Біялогія. Навукі аб зямлі. – 2012. – № 1. – С. 85–99.
2. Рельеф Белоруссии / А. В. Матвеев [и др.]. – Минск : Навука і тэхніка, – 1988. – 319 с.
3. Ярцев, В. И. Минералогия. Изучение и определение обломочных минералов антропогенных пород Беларуси / В. И. Ярцев, Я. И. Аношко. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 368 с.
4. Бетехтин, А. Г. Курс минералогии / А. Г. Бетехтин. – М. : ИД КДУ, 2014. – 736 с.
5. Государственная геологическая карта Российской Федерации [геол. карта дочетвертич. образований] : 3-е поколение: Сер. Балтийская / гл. ред. Ю. Б. Богданов. – 1 : 1 000 000, 10 км в 1 см. – СПб. : Картогр. ф-ка ВСЕГЕИ, 2012. – Л. Q (35–36).
6. Объяснительная записка к Геологической карте северо-восточной части Балтийского щита [карта]. – 1 : 500 000, 5 км в 1 см / А. Т. Радченко [и др.]. – Апатиты : Изд-во КНЦ РАН, 1994. – 95 с.
7. Geology of the Kola Peninsula (Baltic Shield) / ed. F. P. Mitrofanov. – Apatity, 1995. – 145 p.
8. Tołkanowicz, E. Mapa kruszywa naturalnego w Polsce / E. Tołkanowicz, K. Żukowski. – 1 : 500 000, 5 km w 1 sm. – Warszawa, 2001.
9. Geological map of southern part of Polish-Belarusian Cross-Border Area Biała Podlaska and Brest region [map] / L. Marks, A. Karabanov. – 1 : 250 000, 2,5 km in 1 sm. – Warszawa, 2017. – 129 p.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 02.06.2020



УДК 378:91(476)

**Константин Константинович Красовский<sup>1</sup>,  
Александр Александрович Сидорович<sup>2</sup>, Ирина Васильевна Абрамова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>д-р геогр. наук, проф. проф. каф. туризма и страноведения  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>канд. геогр. наук, доц. каф. туризма и страноведения  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>3</sup>канд. биол. наук, декан географического факультета  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Konstantin Krasovskiy<sup>1</sup>, Alexandr Sidorovich<sup>2</sup>, Irina Abramova<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Doctor of Geographical Sciences, Professor,  
Professor of the Department of Department of Tourism and Regional Studies  
of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>2</sup>PhD in Geographical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Department of Department of Tourism and Regional Studies  
of Brest State A. S. Pushkin University

<sup>3</sup>PhD in Biological Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Geography  
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [brestdsid@gmail.com](mailto:brestdsid@gmail.com)<sup>2</sup>; [iva.abramova@gmail.com](mailto:iva.abramova@gmail.com)<sup>3</sup>

## УРБАНОЛОГИЯ

### КАК ПЕРСПЕКТИВНАЯ ГЕОГРАФИЧЕСКАЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЬ

*Приведено обоснование введения новой географической специальности «Урбано­логия». Перспективность данной специальности обусловлена широтой охватываемой проблематики, спектром решаемых задач и комплексностью подхода к их решению. Подготовка специалистов в области урбано­логии позволит повысить качество принимаемых управленческих задач и реализуемых практических мер с учетом сбалансированности социального и экономического развития, экологического состояния городской среды, потребностей и ожиданий населения.*

#### Urbanology as a Perspective Geographic Specialty

*The justification of the introduction of a new geographical specialty «urbanology» is given. The prospects of this specialty are due to the breadth of the scope covered, the range of tasks to be solved and the complexity of the approach to their solution. Training of specialists in the field of urbanology will improve the quality of the management tasks and the implemented practical measures, taking into account the balance of social and economic development, the ecological state of the urban environment, the needs and expectations of the population.*

#### Введение

Урбанизация, превратившись в глобальное явление, вывела города в центр экономической и социальной жизни общества. Однако вместе с кардинальным улучшением материального благополучия людей города как сосредоточение хозяйственной жизни и концентрации населения порождают проблемы, которые являются ключевыми в современном обществе. В первую очередь это проблемы экологического и социального характера. Города предоставляют огромные экономические, технические и культурные возможности, но они же являются и местом социальных конфликтов и общественного рас­слоения, обострения проблем окружающей среды и ухудшения здоровья населения. Масштабы таких проблем определяют тот факт, что ни одна область исследований не может решить их самостоятельно, в силу чего городское развитие требует комплекс-



ного подхода. Внеконкурентное положение во всей системе наук, обладающих интегральным методологическим аппаратом и достижениями в области практической деятельности, бесспорно, занимает география, формирующая ядро урбанографии – комплексной науки, исследующей историю, современное состояние и перспективы развития городов, а также проблемы, связанные с урбанизацией.

### **Результаты исследования и их обсуждение**

Процессы развития человека, общества и природы очень сложны и многообразны. В результате их эволюции и взаимодействия перед человечеством встали многочисленные проблемы, которые вышли за пределы локальных, региональных и национальных границ и приобрели глобальный характер. Глобальные проблемы не являются чем-то новым для нынешнего этапа развития человечества. В современных условиях они представляют собой обострение и углубление существовавших ранее противоречий в системе «человек – общество – природа».

Многие теории современности свидетельствуют о том, что глобальные проблемы превратились в один из важнейших объектов мировой науки и практики. В основе их возникновения лежат два взаимосвязанных процесса. Первый – это итог развития и совершенствования материальной культуры общества в результате эволюции производительных сил и производственных отношений. Второй – это социальный прогресс. Сопавшие по времени научно-техническая революция и значительные социальные перемены в мире привели к возникновению и углублению глобальных проблем современности. Эти проблемы характеризуются динамизмом, возникают как объективный фактор развития общества и для своего решения требуют объединенных усилий всего человечества.

Решение глобальных проблем в современных условиях стало предпосылкой дальнейшего прогресса человечества. Трудность их решения обусловлена тем, что они одновременно являются по своему характеру и естественно-природными, и социальными. Разорвать эти стороны глобальных проблем практически невозможно, поэтому для их решения необходимо учитывать и естественно-природные, и социальные аспекты.

Ориентация общества на улучшение «качества жизни», поиск путей формирования нового «глобального мышления» получает довольно широкое распространение в докладах Римского клуба, целью которого было создание общественного движения для решения глобальных проблем. Странники этого направления выход из глобального кризиса видят в нравственном совершенствовании общества, в развитии системы образования, повышении духовности человека и изменении человеческих качеств.

Работы многих специалистов во всем мире привели к формированию концепции устойчивого развития как глобальной стратегии поведения человечества. В 1980 г. во Всемирной стратегии охраны природы эксперты МСОП (Международный союз охраны природы) определили, что сохранение природы является одним из неотъемлемых элементов процесса сбалансированного социально-экономического развития. Это была реакция мирового сообщества на системный кризис цивилизации, вызванный обострением глобальных проблем современности: экологической, демографической, войны и мира, голода, изменения климата и т. д. Термин «устойчивое развитие» был впервые представлен МСОП в 1987 г. в публикации «Наше общее будущее», известной как отчет Комиссии Брунтланд. Устойчивое развитие на глобальном уровне определено как «развитие, которое обеспечивает нужды современного поколения, не подвергая угрозе жизненные потребности будущих поколений». На уровне отдельного государства – это дина-



мичное и сбалансированное развитие регионов страны, которое характеризуется высоким уровнем жизни и качеством среды обитания. В сентябре 2015 г. государства – члены ООН приняли Повестку дня в области устойчивого развития на период до 2030 г., в рамках которой были обозначены 17 целей устойчивого развития, 11-я цель получила название «Устойчивые города и населенные пункты» [1].

Формирование ноосферы (антропосферы, социосферы, глобального социально-экономического пространства) – длительный, сознательно организованный и направляемый процесс, который сегодня находится еще на этапе своего становления. И одна из главных его составляющих – формирование нового глобального сознания. Поэтому концепция «устойчивого развития» отнюдь не открывает путей решения стоящих перед человечеством задач. В условиях глобализации необходимость осмысления современных реалий и решения актуальных проблем экономического и социального развития стран мира ставит перед наукой новые задачи, требует поиска новых методов и подходов к их решению. Отсюда огромное значение в деле решения глобальных проблем приобретает развитие междисциплинарных исследований и формирование новых научных направлений.

Модель устойчивого развития определяется как система гармоничных отношений в триаде «человек – окружающая среда – экономика», реализующая сбалансированное социально ориентированное и экономически эффективное развитие страны.

В условиях глобализации необходимость осмысления современных реалий и решения актуальных проблем экономического и социального развития стран мира ставит перед наукой новые задачи, требует поиска новых методов и подходов к их решению. Системная целостность глобальных проблем предполагает определенную систему знаний, характеризующуюся комплексностью современных наук.

Глобализация – процесс втягивания мирового хозяйства, представляющего собой совокупность национальных хозяйств, связанных друг с другом системой международного разделения труда, в рынок и тесное переплетение их экономик, создание единой мировой рыночной экономики и ее инфраструктуры, разрушение национальных суверенных государств, являющихся главными действующими лицами международных отношений на протяжении многих веков. С понятием глобализации на современном этапе социально-экономического развития связывают прежде всего глобализацию финансов и информационных сетей. Но это экономический аспект глобализации.

Экономическая, социальная и политическая география к глобализации подходят с точки зрения формирования гомогенизированного мирового сообщества, живущего по единым законам и ценностям. Урбанизация – социально-экономический процесс, и как в экономике первичной ячейкой являются предприятия, которые в пределах государства образуют хозяйство страны, так в урбанизации первичной ячейкой являются города, образующие в пределах страны систему расселения. Национальные экономики через международную интеграцию образуют мировое хозяйство, а системы расселения через процессы агломерирования, метрополизации ведут к созданию урбанизированных зон, районов, мегалополисов, вплоть до ойкуменополиса.

Урбанистическая составляющая нарастает и в глобальных процессах нашего быстро меняющегося мира, и в повседневной жизни каждого из нас. Глобальность проблемы урбанизации вытекает из того, что она охватила весь мир, все регионы и страны. Сегодня в городах проживает более половины человечества, а, учитывая, что формируются новые формы расселения, с урбанизацией связано все человечество. Именно поэтому



проблему урбанизации в одной из своих резолюций Генеральная ассамблея ООН назвала важнейшей из глобальных проблем современности.

Изучение современных тенденций развития урбанизации показало, что, имея стадияльно-региональный характер в различных странах и регионах мира в зависимости от конкретных социально-экономических, политических и управленческих условий, урбанизация имеет свои особенности. Для урбанизации как глобального и системного социально-экономического процесса характерны свои многочисленные внутренние проблемы:

- 1) территориальные, или географические (урбанизированные территории и сельскохозяйственные земли);
- 2) демографические (городское и сельское население, депопуляция, старение, средняя продолжительность жизни);
- 3) экономические (занятость населения);
- 4) экологические (урбанизированный и экологический каркасы территории);
- 5) градостроительные (планировка и застройка);
- 6) социально-культурные (образ жизни).

Урбанизация – глобальный процесс современности. К ее исследованию вследствие многогранности темы обращаются представители различных наук (экологии, географии, экономики, демографии, градостроение и др.). У всех ученых при этом урбанизация выступает в качестве единого объекта исследования. Однако предмет изучения у представителей различных наук специфический, характеризующий определенную отрасль знания. Поэтому изучить проблему урбанизации можно только на основе комплексного подхода, сочетающего методы исследования различных наук.

Урбанизация выступает и как конкретно-исторический этап во всемирном развитии общества, и как вполне определенный применительно к каждой стране процесс, характеризующийся становлением и развитием городов. В связи с этим при изучении урбанизации можно выделить два основных направления. Первое – это исследование самого процесса, его общих пространственно-временных закономерностей и особенностей проявления в странах разного типа. Второе – изучение результатов и особенностей урбанизации в конкретных странах и районах [2].

Экономическая и социальная география, изучая город как пространственную форму организации общества и рассматривая его как систему в системе городов, является лидером среди наук в изучении урбанизации как глобального социально-экономического процесса. Однако на современном этапе развития общества в связи с многоаспектностью урбанизации необходимо и возможно становление новой комплексной науки – урбанологии, имеющей свой предмет, объект и специфические подходы к исследованию. Изучение пространственно-временных особенностей развития урбанизации и разработка путей устойчивого развития возможны только в результате комплексного подхода методов исследования различных наук (рисунок).

Общепринятый термин «урбанистика» в переводе с итальянского дословно означает «наука планировки города», т. е. в нем заключен только градостроительный и в какой-то степени географический аспект урбанизации, если использовать термин «геоурбанистика». Урбанология (авт.) (от лат. *urbanus* – городской, греч. *logos* – наука) – это комплексная наука об урбанизации, изучающая ее пространственно-временную динамику, экономико-географические, экологические, демографические, градостроительные и социопсихологические особенности. Объектом изучения урбанологии должны стать городские системы как пространственные формы расселения любого таксономи-



ческого ранга (от города до ойкуменополиса). Предметом ее изучения на основании глобального, цивилизационного и антропокультурного подходов стала бы городская среда как понятие, выражающее глубинную сущность урбанизированного расселения. Перспективы развития урбанизации в различных регионах и странах мира будут связаны с осознанным выбором людьми места постоянного места жительства (город, пригород, сельская местность) в зависимости от условий и качества в них городской среды.



Рисунок. – Модель урбано́логии и ее межпредметных связей

Во многих ведущих университетах экономически развитых стран общественный запрос на комплексное решение проблем урбанизации обусловил введение специальностей, связанных с урбано́логией. Спектр таких специальностей очень широк и в первую очередь зависит от экономико-географических особенностей стран, профиля конкретного учебного заведения и компетенции профессорско-преподавательского состава. При этом специальности, связанные с урбано́логией, представлены как на уровне как бакалавриата, так и магистратуры.

В содержательном контексте можно выделить несколько групп специальностей. Во-первых, это те специальности, в которых на первый план выдвигается география. Например, специальности «География, городское и региональное планирование» (Geography and Urban and Regional Planning) в Университете Бирмингема (Великобритания), «География и городские исследования» (Geography and Urban Studies) в Западном Сиднейском университете (Австралия), «География человека и городские исследования» (Human Geography and Urban Studies) в Лондонской школе экономики и политических наук (Великобритания), «Туристическая география и планирование» (Tourism Geography and Planning) и «География человека, городское и региональное планирование» (Human Geography and Urban and Regional Planning) в Университете Гронингена (Нидерланды). Во-вторых, специальности, концентрирующиеся на различных социально-



экономических и архитектурно-планировочных аспектах изучения городов: «Городские исследования и планирование» (Urban Studies and Planning) в Университете Хельсинки (Финляндия), «Городские исследования» (Urban Studies) в Университете Мальмё (Швеция), «Региональное развитие и пространственное планирование» (Regional Development and Spatial Planning) в университете Ньюкасла (Великобритания), «Устойчивое городское развитие» (Sustainable Urban Development) в Оксфордском университете (Великобритания) [3].

Для овладения профессиональными компетенциями, например, соискателям степени магистра в Оксфордском университете предлагаются для изучения такие дисциплины, как «Введение в устойчивое городское развитие», «Изменение климата и искусственная среда», «Планировка и городской дизайн», «Финансовая устойчивость», «Устойчивый транспорт», «Урбанизм, сообщество и градостроительство», «Лидерство, управление и города будущего» и др. [4]. В целом же анализ содержания учебных планов специальностей, связанных с урбанологией и представленных в различных университетах, позволяет отметить такие основные учебные дисциплины, как «Урбанизм и планирование (пространственное планирование)», «Планирование застроенной среды», «Современные проблемы городского развития и планирования», «Гидроклиматология: климат и вода», «Экологические системы», «Управление биоразнообразием и сохранение окружающей среды», «Управление окружающей средой», «Экологический менеджмент: теория, политика, практика», «Геоморфология и палеосреда», «Изменение окружающей среды и ландшафта», «Социальная география», «Современная география человека», «Занятость населения», «Геодемография», «Политическая география», «Экономическая география», «Общество, среда и политика», «Городская политика», «Географические информационные системы», «Статистические методы и прикладные географические информационные системы (ГИС)», «Методы полевых исследований».

Учитывая современные особенности и тенденции развития урбанизации в Республике Беларусь, возникшие и усугубляющие ее проблемы экономического, экологического, демографического и градостроительного характера, возникла настоятельную необходимость подготовки специалистов в данной отрасли науки на географических факультетах страны. Вместе с тем приоритет в открытии специальности «Урбанология», как и всех иных новых специальностей, должен оставаться за региональными учреждениями высшего образования, что позволит не только учесть специфику развития большинства городских поселений страны, которая кардинально отличается от столичного города, но и существенно перераспределить миграционные потоки, направленные в основном в г. Минск [5].

Специалисты-урбанонологи, понимая город как целостную систему, в своей работе смогут сочетать междисциплинарный подход, позволяющий органично сочетать как профессиональные оптики изучающих город дисциплин, так и интересы различных групп населения, организаций и социальных институтов. Выпускники данных специальностей смогут работать как в государственных организациях и учреждениях, так и в частном секторе на уровне города, района, области, страны в целом. Местом приложения труда урбанолога прежде всего могут стать организации управления пространственным развитием административно-территориальных единиц страны. Кроме того, данные специалисты будут востребованы в области разработки и реализации стратегических планов развития урбанизированных территорий, в сфере экологии, демографии, туризма, ландшафтного проектирования, культуры и т. д.



### Заклучение

Современное развитие общества требует комплексного подхода к решению проблем, обусловленных процессами урбанизации. Ответом на соответствующие вызовы выступает становление и укрепление позиций урбанографии – комплексной науки, исследующей историю, современное состояние и перспективы развития городов, а также проблемы, связанные с урбанизацией. Основу урбанографии составляет система географических наук, что и определяет целесообразность открытия одноименной специальности именно в рамках географической подготовки специалистов. Данная специальность позволит повысить качество принимаемых управленческих решений и реализуемых практических мер с учетом сбалансированности социального и экономического развития, экологического состояния городской среды, потребностей и ожиданий населения. Получаемые в процессе обучения компетенции, наряду с опытом осуществления научных исследований, позволят выпускникам специальности «Урбанография» успешно строить карьеру и профессионально реализовываться на государственной службе, в некоммерческих и коммерческих организациях как национального, так и международного уровня.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Преобразование нашего мира. Повестка дня в области устойчивого развития на период до 2030 года [Электронный ресурс] : резолюция A/RES/70/1 Ген. Ассамблеи, 25 сент. 2015 г. // Организация Объединенных Наций. – Режим доступа: <https://undocs.org/ru/A/RES/70/1>. – Дата доступа: 28.09.2020.
2. Красовский, К. К. Урбанистическая эволюция Беларуси : монография / К. К. Красовский. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2009. – 237 с.
3. Database of Masters degree programmes [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.findamasters.com>. – Date of access: 28.09.2020.
4. University of Oxford [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.ox.ac.uk/>. – Date of access: 28.09.2020.
5. Сидорович, А. А. Миграция как фактор трансформации региональных рынков труда Беларуси / А. А. Сидорович // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Геаграфія. Біялогія. – 2020. – № 1. – С. 69–76.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 19.09.2020*



УДК 911.3+331.5 (476)

**Александр Александрович Сидорович**

*канд. геогр. наук, доц. каф. туризма и страноведения*

*Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

**Alexandr Sidorovich**

*PhD in Geographical Sciences, Associate Professor,*

*Associate Professor of the Department of Department of Tourism and Regional Studies*

*of Brest State A. S. Pushkin University*

*e-mail: brestsid@gmail.com*

### **ИНСТИТУЦИОНАЛЬНЫЙ ФАКТОР ТРАНСФОРМАЦИИ РЫНКА ТРУДА БЕЛАРУСИ: ДЕМОГРАФИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ПЕНСИОННОЙ РЕФОРМЫ**

*Проведена оценка регионального воздействия изменения общеустановленного пенсионного возраста на объем предложения услуг на рынке труда Беларуси. С начала проведения пенсионной реформы в 2017 г. в структуре факторов динамики численности населения трудоспособного возраста наряду с миграционным и структурно-демографическим (смертностью и возрастным движением) появился институциональный фактор. Определено, что на национальном рынке труда дополнительное увеличение предложения услуг труда за счет институционального фактора составило 2,5 % к началу 2019 г. В большей степени воздействие данного фактора сказывается на женском населении (прирост 3 %). В отношении отдельных областей этот показатель варьирует в пределах 2,6–2,8 %, в г. Минске – 2,1 %. При этом в 20 районах только за 2017 г. дополнительный приток трудоспособного населения за счет институционального фактора превысил 1,8 %.*

#### **Institutional Factor of Transformation of the Labor Market in Belarus: Demographic Effect of Pension Reform**

*The regional impact of retirement age's changes on the Belarusian labor market has been assessed. From the beginning of the implementation of the pension reform in 2017, an institutional factor appeared in the structure of the factors influenced on the dynamics of the working-age population. It was determined that in the national labor market, an additional increase in the supply of labor services due to the institutional factor was 2.5 % by the beginning of 2019. The effect of the institutional factor on the female population (an increase of 3 %) had influenced much more than on the male population. This indicator varies within 2.6–2.8 %, in the city of Minsk it is 2.1% on the region level. At the same time the additional influx of the working-age population due to the institutional factor exceeded 1.8 % in 20 districts only in 2017.*

#### **Введение**

На современном этапе общественного развития Беларусь столкнулась с проблемой депопуляции и старения населения. Усиление отмеченных проблем представляет собой серьезную угрозу национальной безопасности, потому что не только сказывается на общей численности населения как главной ценности любого государства, но и ограничивает потенциал экономического роста из-за сокращения величины трудовых ресурсов. В качестве одного из вариантов решения данной проблемы выступает увеличение общеустановленного пенсионного возраста. Данный способ дополнительного привлечения работников и обеспечения функционирования пенсионной системы используется правительством большинства стран мира. Однако альтернативным вариантом нивелирования отрицательного воздействия демографических процессов на функционирование рынка труда, системы пенсионного и социального обеспечения может выступать учет региональных диспропорций формирования трудовых ресурсов посредст-



вом перераспределения, рационализации и оптимизации использования трудового потенциала Беларуси. Это обуславливает особую актуальность геодемографических исследований рынка труда, результаты которых позволяют научно обосновать возможность хронологического расширения периода реформирования пенсионной системы и снизить социальную напряженность при увеличении общеустановленного пенсионного возраста.

Цель работы – оценить влияние изменения общеустановленного пенсионного возраста на формирование трудоспособного населения и объема предложения услуг на рынке труда Беларуси по регионам.

### **Материалы и методика исследования**

На динамику численности трудоспособного населения оказывают влияние институциональный, структурно-демографический и миграционный факторы. Институциональный фактор зависит от изменения законодательно установленных границ трудоспособного возраста. Нижняя возрастная граница трудоспособности в Беларуси составляет 16 лет, верхняя – до 2017 г. для мужчин составляла 60 лет, для женщин – 55.

Из-за интенсивного демографического старения в конце XX в. стали проявляться негативные тенденции в формировании доходной части Фонда социальной защиты населения, в котором аккумулируются средства для осуществления пенсионных выплат. В силу этого было принято решение о проведении пенсионной реформы, по завершении которой пенсионный возраст путем поэтапного повышения на 0,5 лет за каждый календарный год увеличится к 2022 г. для мужчин до 63 лет, для женщин – до 58 лет [1].

Изменение численности трудоспособного населения под влиянием институционального фактора определяется по формуле (1):

$$И = МН_{вк1} + ЖН_{вк1}, \quad (1)$$

где И – абсолютное изменение численности трудоспособного населения за анализируемый период за счет институционального фактора;  $МН_{вк1}$ ,  $ЖН_{вк1}$  – численность соответственно мужского и женского населения старших возрастных групп трудоспособного населения, не перешедшая в группу населения старше трудоспособного возраста вследствие законодательного увеличения общеустановленного возраста выхода на пенсию.

Деления абсолютного изменения численности трудоспособного возраста за анализируемый период на его численность по состоянию на начало данного периода позволяет рассчитать относительный вклад институционального фактора.

Информационную базу проведенного исследования составили данные статистических сборников и Интерактивной информационно-аналитической системы распространения официальной статистической информации Национального статистического комитета Республики Беларусь [2–4].

### **Результаты исследования и их обсуждение**

В рамках решения проблем демографического старения, в частности повышения финансовой устойчивости пенсионных систем, руководство многих стран принимает решение об увеличении пенсионного возраста с целью продления участия пожилых людей в экономической деятельности. В связи с этим в ряде стран проводится планомерная политика по повышению возраста выхода на пенсию с целью стабилизации пенсионной системы. В рамках данного общемирового тренда в Беларуси также принята реформа по поэтапному повышению пенсионного возраста (таблица).



Таблица. – Пенсионный возраст мужского и женского населения Беларуси и стран-соседей (по состоянию на 1 мая 2019 г.), лет (составлено по [5])

Страна	Мужчины	Женщины
Израиль	68,33	63,33
Греция	67,00	67,00
Италия	67,00	67,00
США	66,00	66,00
Германия	65,58	65,58
Великобритания	65,50	65,50
Польша	65,00	60,00
Литва	63,67	62,33
Латвия	63,25	63,25
Беларусь	61,00	56,00
Российская Федерация	60,50	55,50
Украина	60,00	58,50

По сути, «раздвижение» возрастных границ трудоспособного возраста, в частности увеличение верхнего предела, представляет собой один из самых быстрых способов увеличения трудового потенциала, сопряженного, однако, с возрастанием социальной напряженности. Проведение таких реформ требует учета реального состояния рынка труда, поскольку на трудоизбыточных рынках такие меры приводят к еще большему объему предложения услуг труда и, как результат, к увеличению безработицы, особенно среди младших возрастных групп трудоспособного населения и в первую очередь выпускников учреждений образования.

В 2017 г. общеустановленный пенсионный возраст для мужчин был повышен до 60,5 лет, для женщин – до 55,5 лет. В 2018 г. возрастная планка была поднята до 61 года и 56 лет для мужчин и женщин соответственно. Следовательно, эффект институционального фактора можно оценить по состоянию на начало 2018 и 2019 г. Так, по состоянию на 1 января 2018 г. численность лиц, достигших ранее действовавшего пенсионного возраста (60 лет для мужчин и 55 лет для женщин), распределилась практически поровну на две группы: достигших измененного пенсионного возраста (60,5 для мужчин и 55,5 для женщин) и не достигших. Лица, которым в 2017 г. должно было исполниться 60 и 55 лет для мужчин и женщин соответственно и которые родились в первой половине года (т. е. январе – июне), к концу 2017 г. достигли измененного пенсионного возраста.

Эффект от повышения пенсионного возраста оценивается в увеличении трудовых ресурсов на 1,3 % в целом на уровне страны. В абсолютном выражении институциональный фактор позволил привлечь на рынок труда порядка 70 тыс. человек. На уровне областных регионов эффект сопоставим и находится в пределах 1,3–1,4 %. Меньший эффект отмечен в г. Минске – 1,1 %. В большей степени прирост за счет институционального фактора на уровне областных регионов, как и в целом по стране, затронул женское население (1,6–1,7 %). В г. Минске прирост женского трудоспособного населения составил 1,3 % (рисунок 1). Это объясняется более выровненной половозрастной структурой населения в отличие от других регионов, в которых старшие возрастные группы превосходят младшие по численности. Доля женского населения в условно дополнительном притоке на рынок труда составляет 56 % от общего прироста, а в г. Минске из-за преобладания в структуре трудоспособного населения женщин – 59 %. Фактиче-



ски повышение пенсионного возраста за первый год проведения реформы не привело к увеличению трудоспособного контингента, а лишь компенсировало отток за счет других факторов.

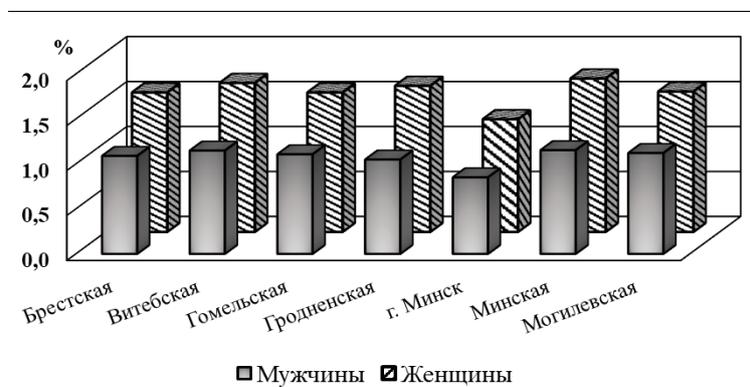


Рисунок 1. – Дополнительное увеличение предложения на рынке труда за счет институционального фактора (по состоянию на 01.01.2018 г.), %

На уровне административно-территориальных районов эффект институционального фактора проявляется в большей степени. Выделяется группа районов с достаточно высоким приростом трудоспособного района, превышающим 1,8 % (рисунок 2).

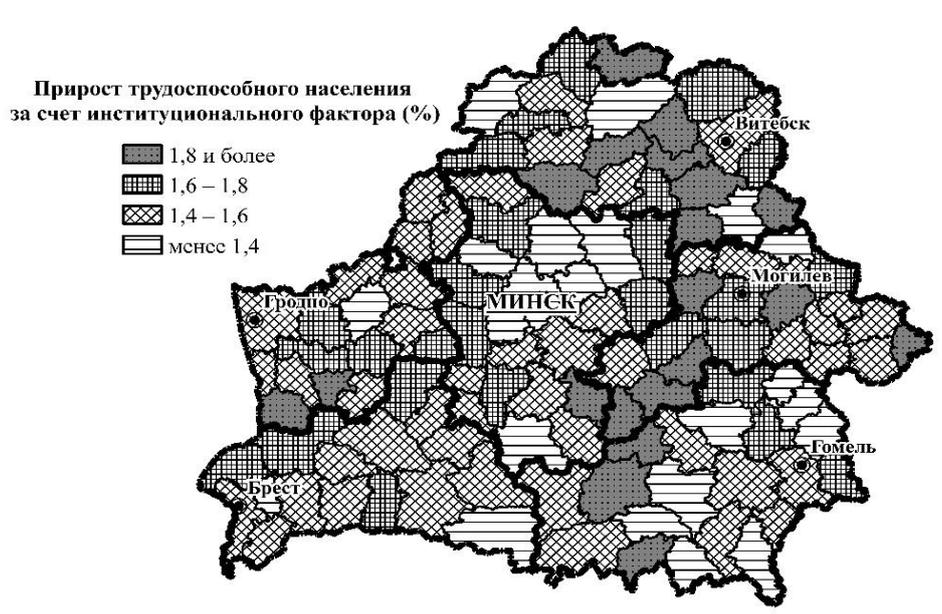


Рисунок 2. – Дополнительное увеличение предложения на рынке труда за счет институционального фактора по административно-территориальным районам (по состоянию на 01.01.2018 г.)

К этой группе относятся исключительно «периферийные» районы без мощной экономической базы (Бельничский, Глусский, Докшицкий, Зельвенский, Россонский, Свислочский, Хотимский и др.). В Бобруйском районе прирост составил 2,2 %.



Как правило, демографический потенциал данных районов в значительной степени исчерпан, и даже в условиях низкой рождаемости они выступают источниками мигрантов для более развитых экономических регионов, что в еще большей степени сказывается на деформации половозрастной структуры их населения [6]. В этих районах старшие трудоспособные возрастные группы являются более многочисленными, чем младшие.

Другая группа районов, напротив, отличается показателями прироста трудоспособного населения за счет институционального фактора на уровне ниже средних значений. К этой группе относятся районы с наиболее высоким экономическим потенциалом (пристоличные районы, Жлобинский, Лидский, Полоцкий, Солигорский) либо относительно более благополучные в демографическом аспекте с высокими показателями рождаемости (Брагинский, Ветковский, Кормянский, Столинский, Чечерский). Например, наименьший прирост отмечается в Наровлянском районе (0,9 %). Остальные районы, составляющие большинство, занимают промежуточные положения и характеризуются значениями прироста трудоспособного населения, близкими к среднереспубликанским показателям.

Как и на уровне областных регионов, для административно-территориальных районов характерен более существенный прирост женского трудоспособного населения. В таких районах, как Бешенковичский, Бобруйский, Октябрьский, Ушачский, прирост женского трудоспособного населения превысил 2,6 %. Наибольший прирост мужского трудоспособного населения за счет институционального фактора отмечен в Зельвенском районе.

Дальнейшее увеличение общеустановленного пенсионного возраста привело к более заметному влиянию пенсионной реформы на состояние рынка труда. В июле 2018 г. пенсионный возраст для мужчин был увеличен до 61 года, а для женщин – до 56 лет. Следовательно, лица, которые в 2018 г. достигли возраста 60 для мужчин и 55 для женщин, по состоянию на начало 2019 г. входили в категорию трудоспособного возраста. Прирост трудоспособного контингента за счет институционального фактора в целом на уровне Беларуси к 2019 г. составил 2,5 %. В отношении отдельных областей этот показатель варьирует в пределах 2,6–2,8 %, в г. Минске составил 2,1 %. Прирост женского трудоспособного населения составил около 3 % (рисунок 3).

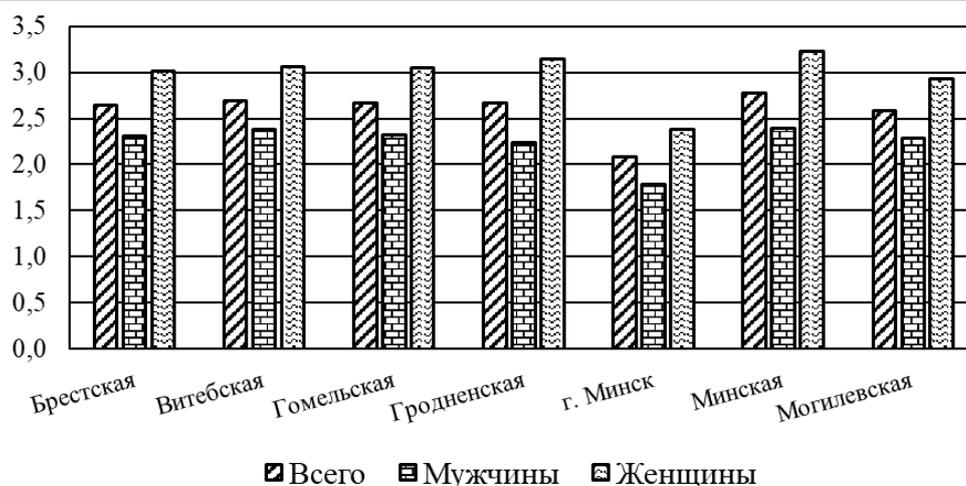


Рисунок 3. – Дополнительное увеличение предложения на рынке труда за счет институционального фактора (по состоянию на 01.01.2019), %



В соответствии с проводимой реформой в 2022 г. пенсионный возраст (верхняя граница трудоспособного возраста) будет повышен до 63 лет для мужского и до 58 лет для женского населения. По нашему мнению, реализация данного подхода в решении проблемы пенсионного обеспечения является необоснованной и неполной в условиях относительно большого потенциала по снижению смертности трудоспособного населения, а также в условиях существующих проблем функционирования рынка труда. К числу последних относятся относительно высокая доля скрытой занятости, существенная доля государственного сектора экономики, значительный диспаритет между уровнем заработной платой высококвалифицированных работников бюджетной сферы и работников других сфер, существенные расхождения уровня минимальной заработной платы и реальной стоимости минимальной потребительской корзины. Кроме того, изменение пенсионного возраста в сторону его увеличения без параллельного осуществления перехода от распределительной (солидарной) к накопительной системе пенсионного обеспечения является лишь «полумерой», которая позволяет решить проблему пенсионных выплат из средств Фонда социальной защиты населения исключительно в краткосрочной перспективе. Существенным аргументом для обоснования данной позиции выступает недостаточный разрыв между средней продолжительностью жизни мужского населения и пенсионным возрастом. Так, в соответствии с ранее проведенными расчетами, около 30 % мужчин не доживают до пенсионного возраста (для женского населения соответствующий показатель составляет 7 %) [7].

### **Заключение**

Таким образом, установлено, что на национальном рынке труда дополнительное увеличение предложения услуг труда за счет институционального фактора за два года реализации пенсионной реформы (2017 и 2018 гг.) составило 2,5 %.

В большей степени воздействие институционального фактора сказывается на женском населении (прирост 3 %). В отношении отдельных областей этот показатель варьирует в пределах 2,6–2,8 %, в г. Минске составляет 2,1 %. При этом в первый год реализации пенсионной реформы (2017) дополнительный приток трудовых ресурсов в целом в Беларуси не столько привел к увеличению потенциального объема предложения услуг труда, сколько компенсировал потери трудоспособного населения из-за воздействия структурно-демографического фактора – смертности и превышения численности лиц, достигающих общеустановленного пенсионного возраста, над численностью молодежи, вступающей в трудоспособный возраст.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. О пенсионном обеспечении : Закон Респ. Беларусь, 17 апр. 1992 г., № 1596-ХП // [Электронный ресурс] // Эталон. Законодательство Республики Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Режим доступа: <http://etalononline.by>. – Дата доступа: 22.12.2019.
2. Демографический ежегодник Республики Беларусь : стат. сб. / Нац. стат. ком. Респ. Беларусь ; редкол.: И. В. Медведева [и др.]. – Минск, 2019. – 429 с.
3. Демографический ежегодник Республики Беларусь : стат. сб. / Нац. стат. ком. Респ. Беларусь ; редкол.: И. В. Медведева [и др.]. – Минск, 2015. – 449 с.
4. Интерактивная информационно-аналитическая система распространения официальной статистической информации [Электронный ресурс] / Нац. стат. ком. Респ. Бе-



ларусь. – Режим доступа: <http://dataportal.belstat.gov.by/Indicators/Search>. – Дата доступа: 11.09.2019.

5. Trading Economics [Electronic resource] // Ieconomics Inc. – Mode of access: <http://www.tradingeconomics.com>.

6. Сидорович, А. А. Факторы динамики мужского трудоспособного населения Беларуси / А. А. Сидорович // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Геаграфія. Біялогія. – 2018. – № 1. – С. 43–50.

7. Сидорович, А. А. Трудовой потенциал Беларуси: территориальная структура и прогноз : дис. ... канд. геогр. наук : 25.03.02 / А. А. Сидорович. – Брест, 2014. – 283 л.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 20.04.2020*

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc; \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзнак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. 60б.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);

- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя аб'ёмам 100–150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;

- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруюцца падзагаловакмі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);

- спіс выкарыстанай літаратуры; спіс выкарыстанай літаратуры дубліруюцца ў лацінскім алфавіце (References), пры гэтым колькасць крыніц, прыведзеных у спісе, і ў References, павінна супадаць.

- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на мове артыкула і англійскай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, электронны адрас і кантактныя тэлефоны);

- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;

- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;

- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 30.12.2020. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 17,90. Ул.-выд. арк. 8,80.

Тыраж 50 экз. Заказ № 385.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.